

演算により生成されるグラフの Sequential Location Number

齊藤研究室 日川 敬将

目次

1. Sequential Location Numberの概要
2. グラフの演算の紹介
3. Joinにより生成されるSequential Location Number
4. Cartesian Productにより生成されるSequential Location Number
5. Lexicographic Productにより生成されるSequential Location Number
6. まとめ
7. 今後の課題

Metric Dimension とは?

定義

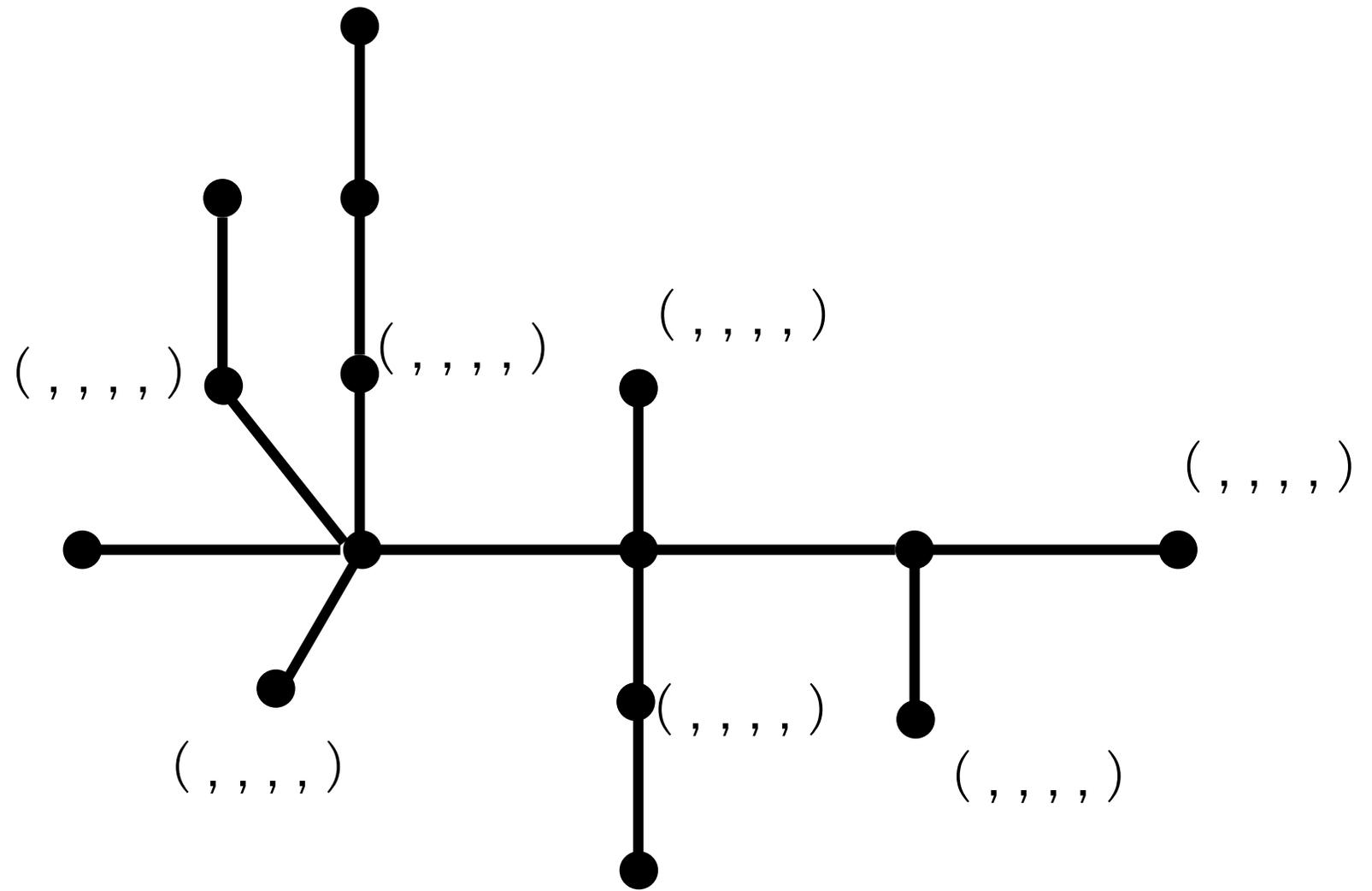
グラフ $G = (V, E)$ において V の任意の部分集合 $S = \{v_0, v_1, \dots, v_d\} (d \in \mathbb{N})$ 及び, G の任意の頂点 $v \in V$ に対して $\mathbf{d}(v|S) = (d(v_0, v), d(v_1, v), \dots, d(v_d, v))$ と定める。

このとき任意のグラフ $G = (V, E)$ について, グラフの任意の2頂点 $u, v \in V$ に対し $u \neq v$ ならば $\mathbf{d}(u|S) \neq \mathbf{d}(v|S)$ が成り立つような $S \in 2^V$ を G の **resolving set** と呼ぶ。また **resolving set** の要素を **probe** と呼ぶ。

G の *resolving set* の中で最小の濃度を持つ, 集合の濃度を G の **Metric Dimension** と呼び $\mathbf{dim}(G)$ で表す。

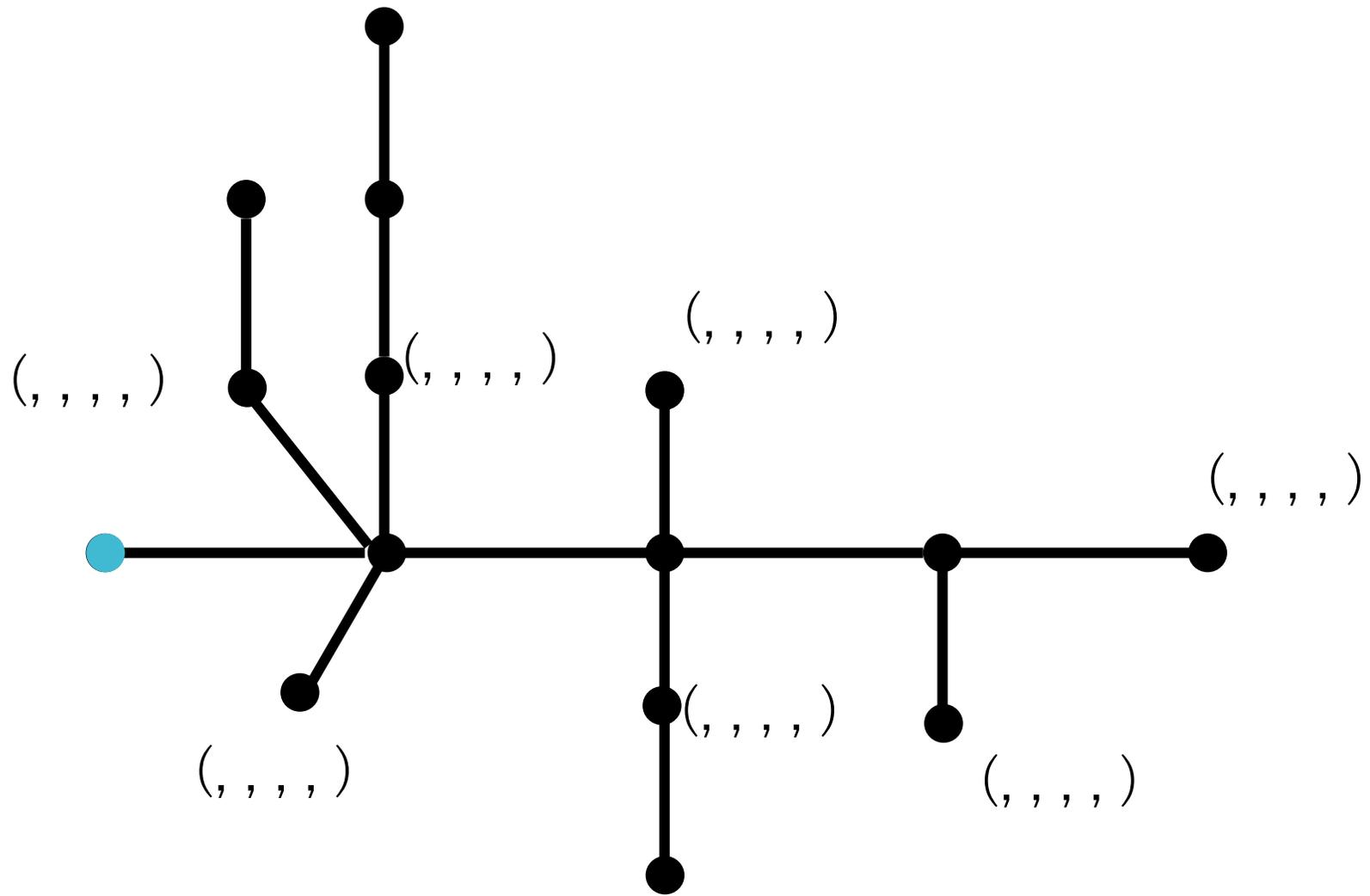
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



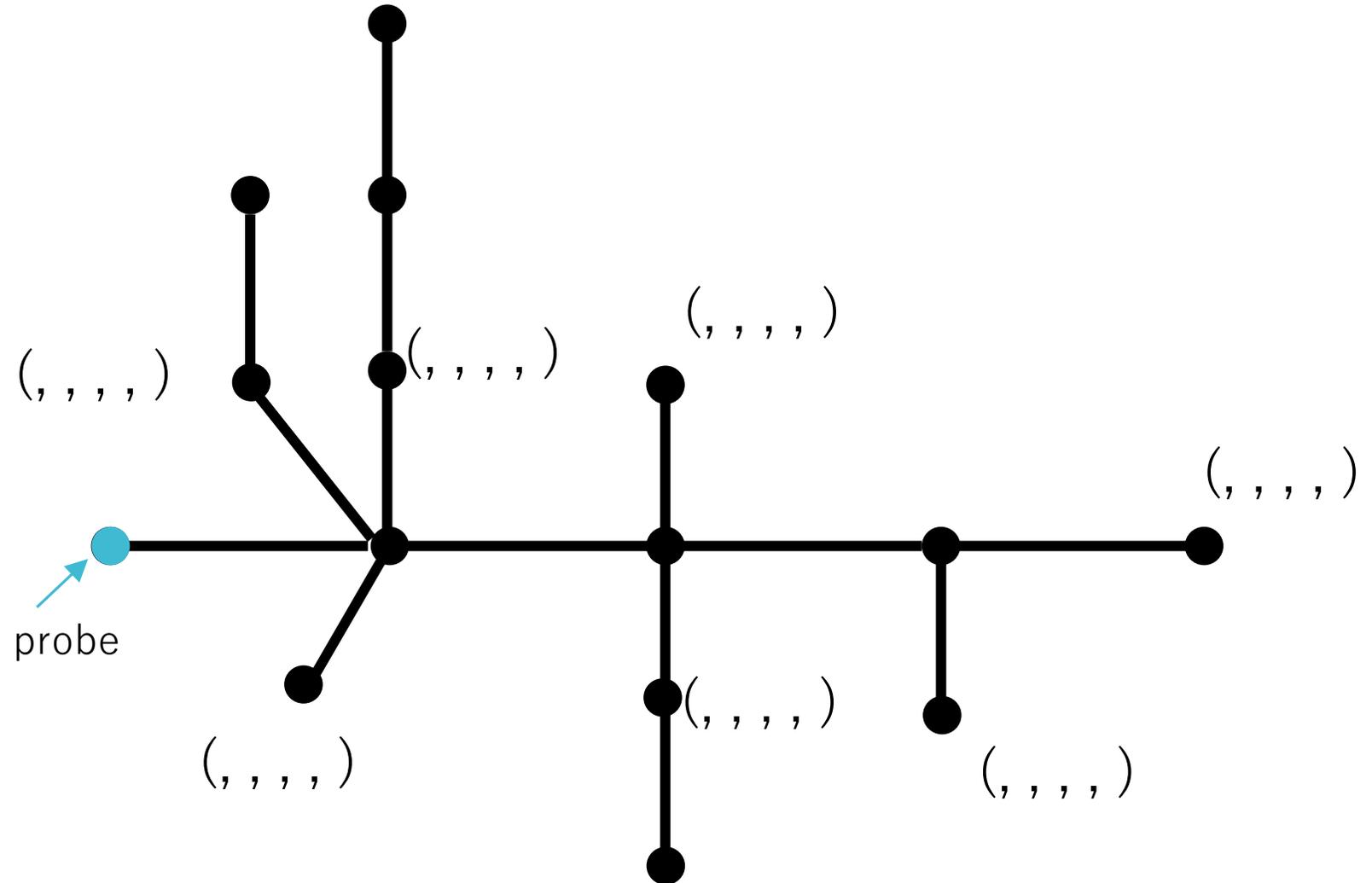
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



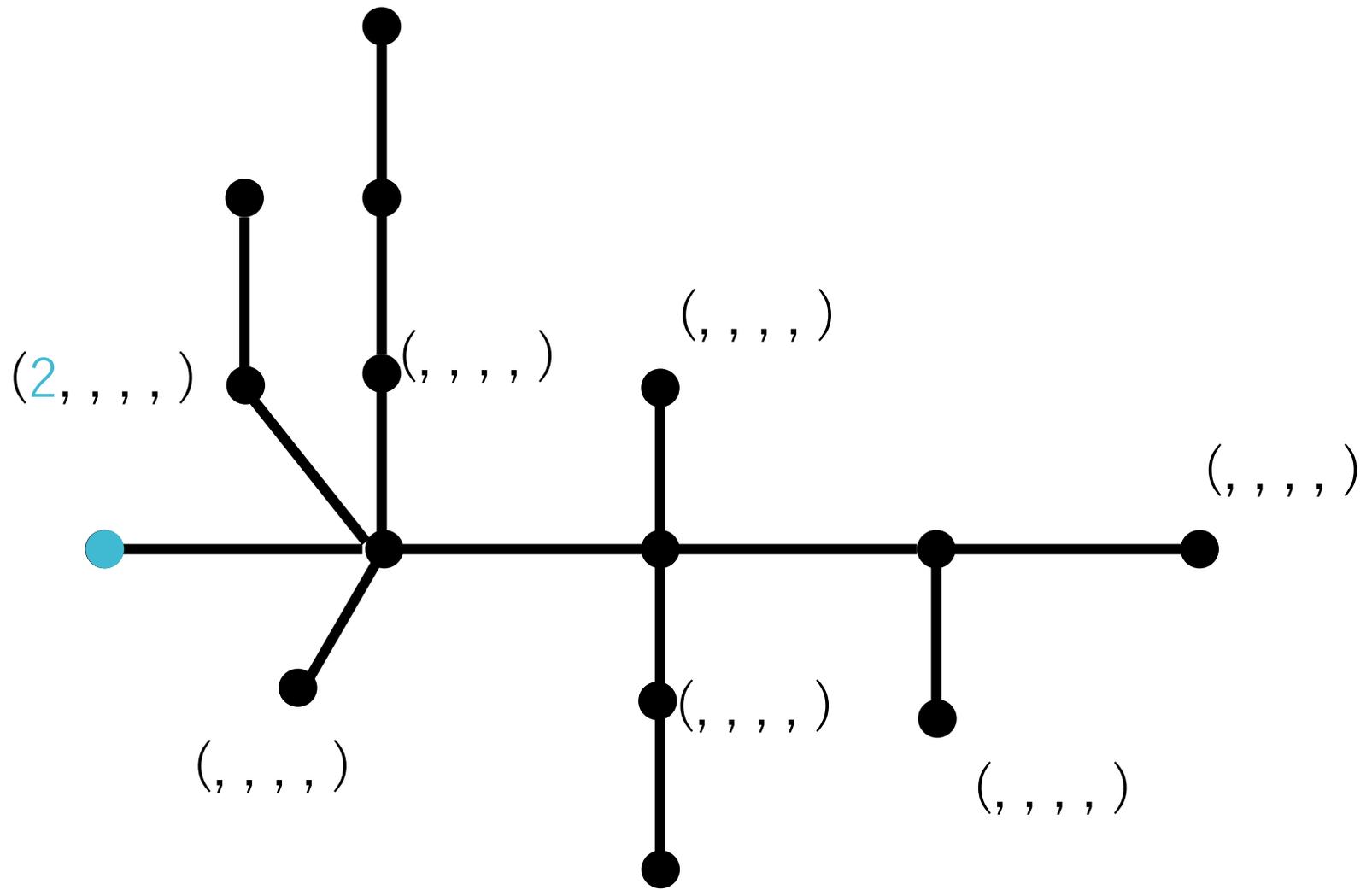
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



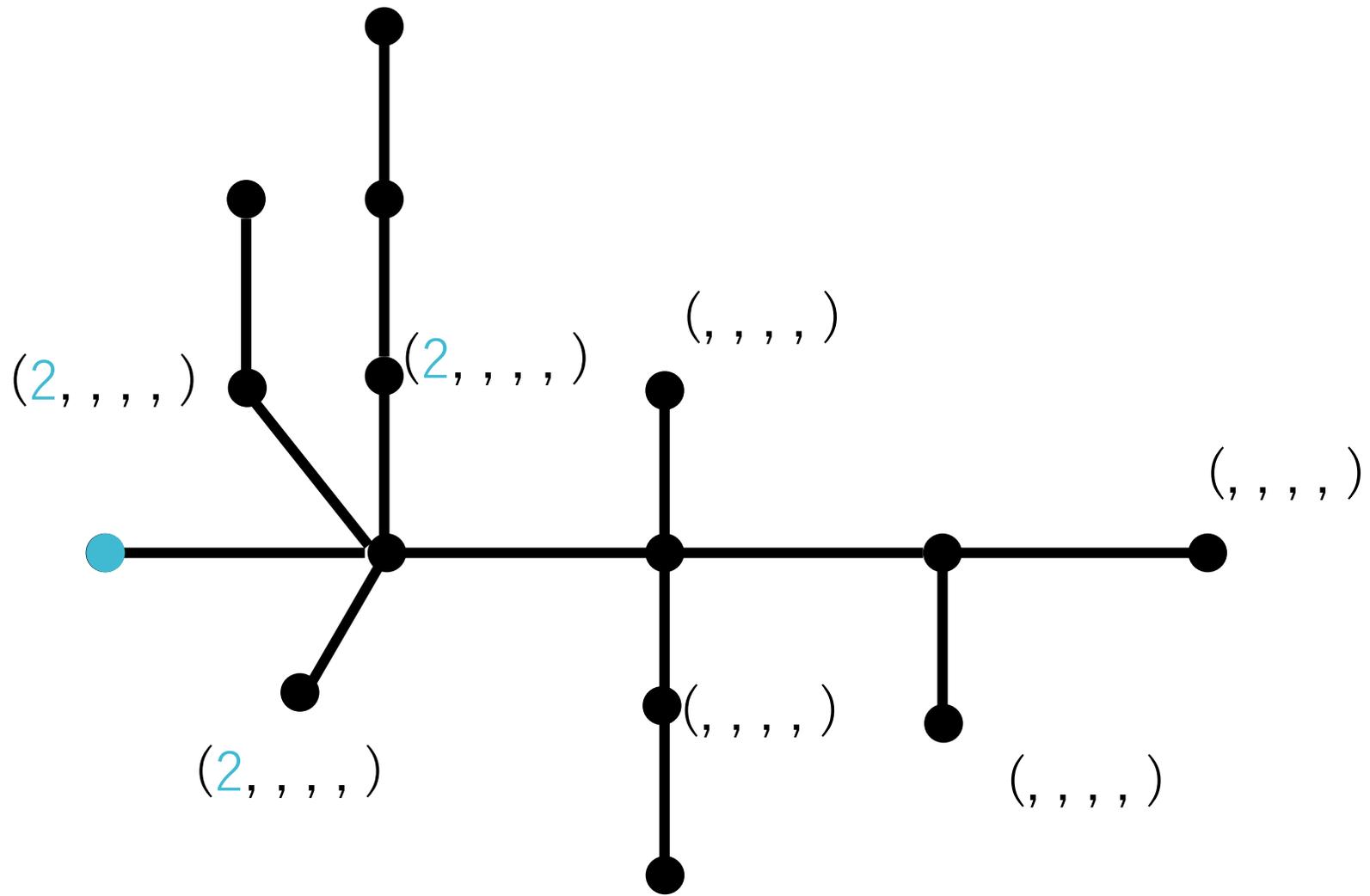
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



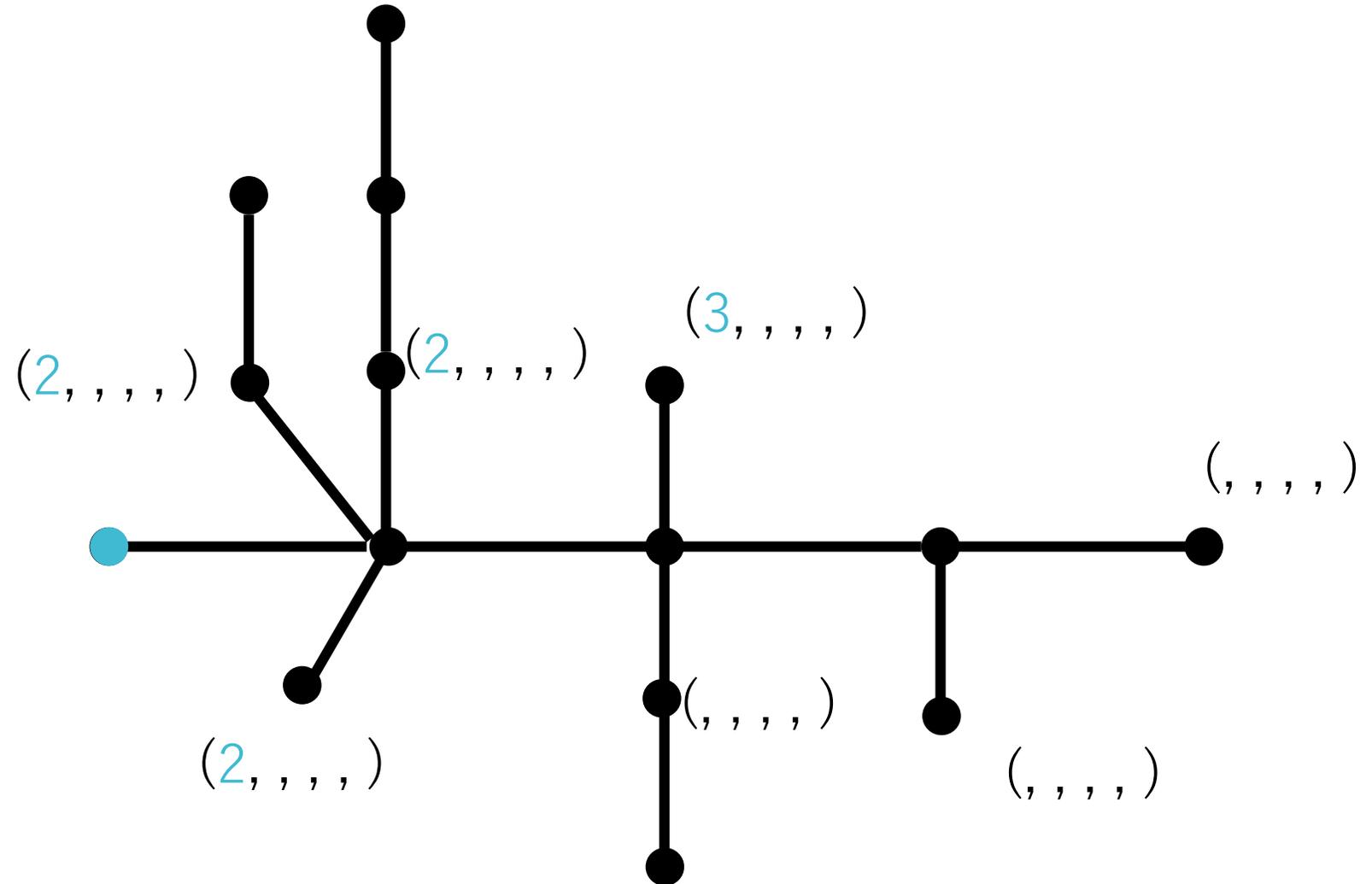
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



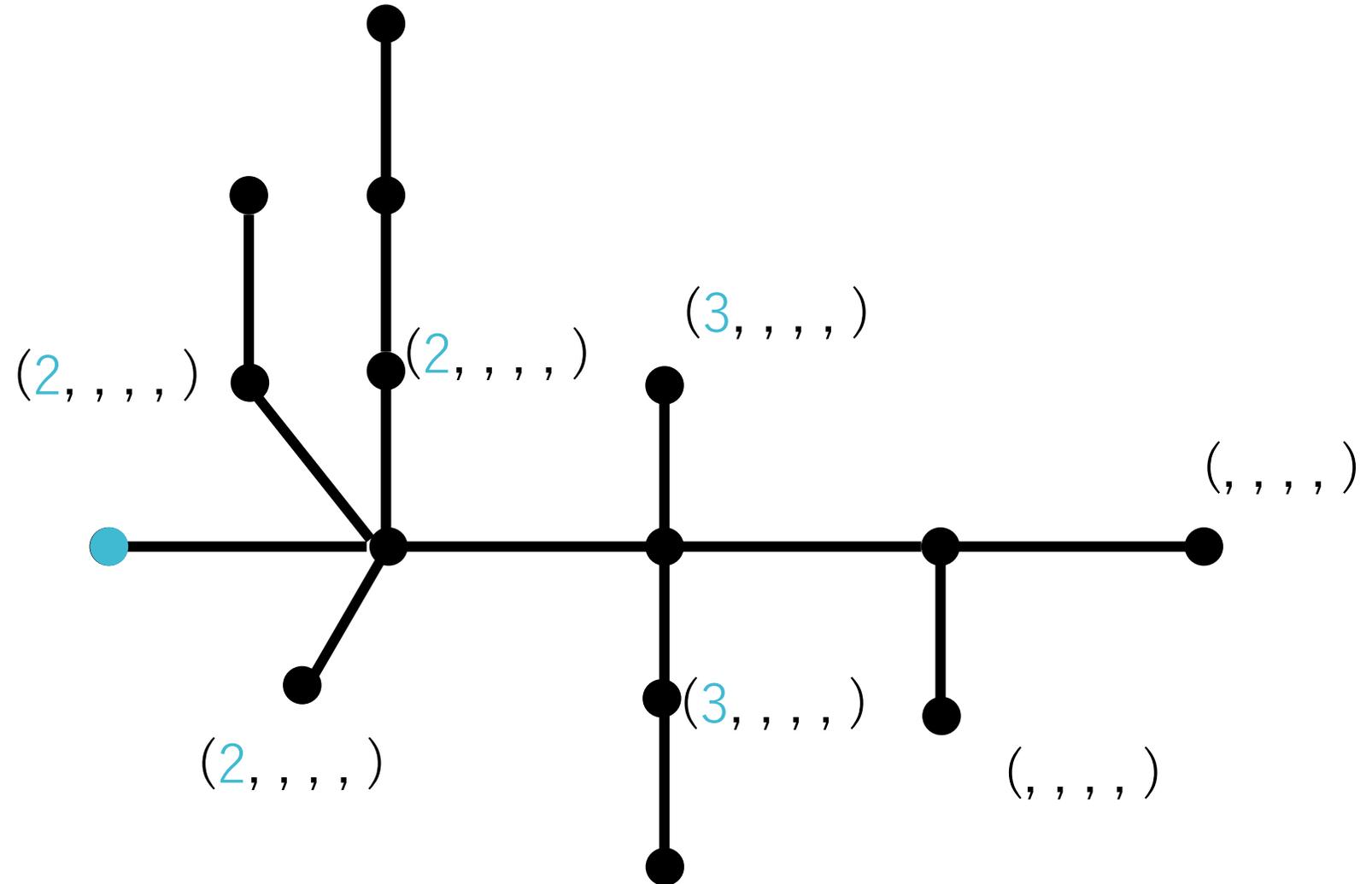
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



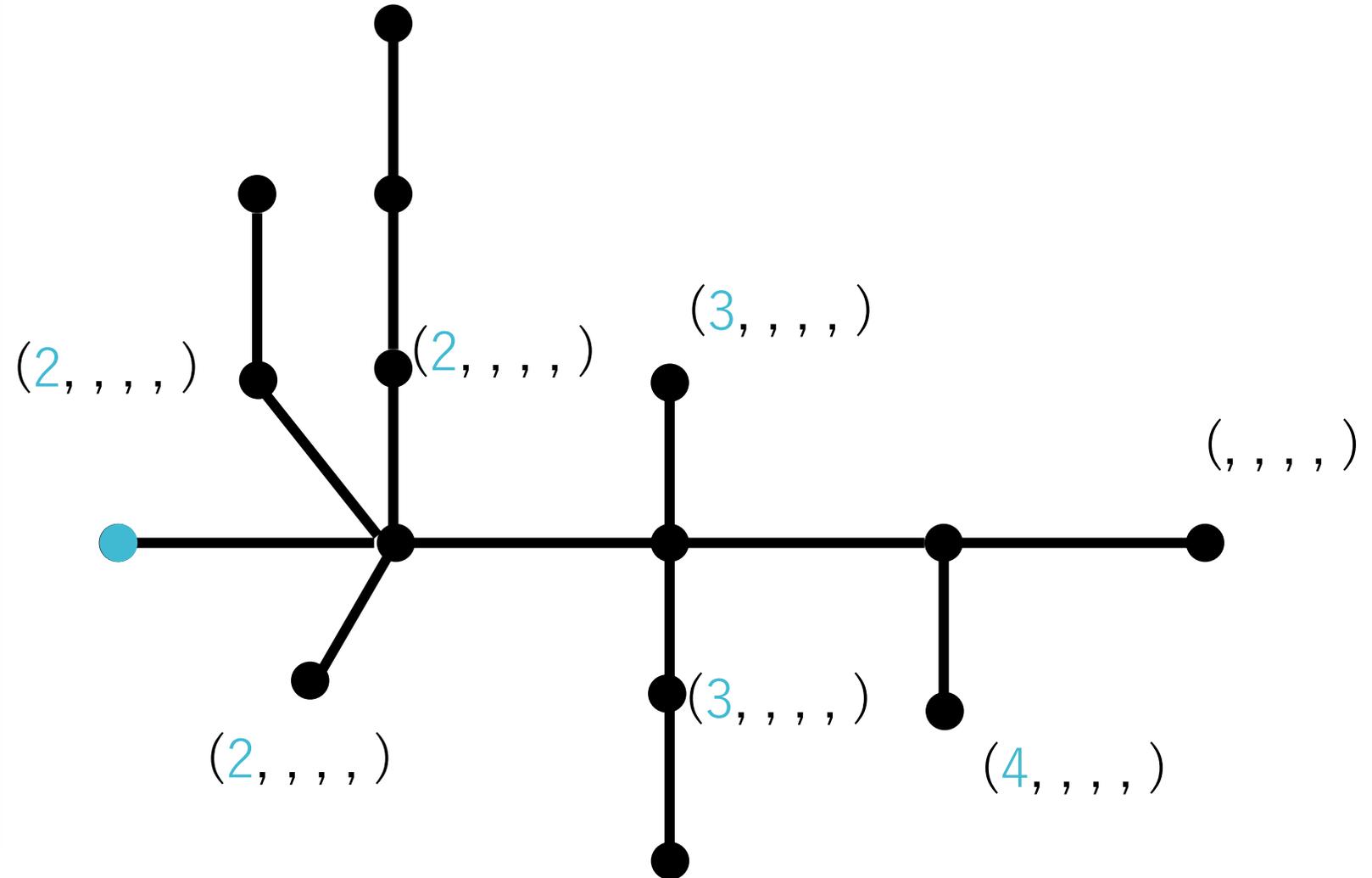
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



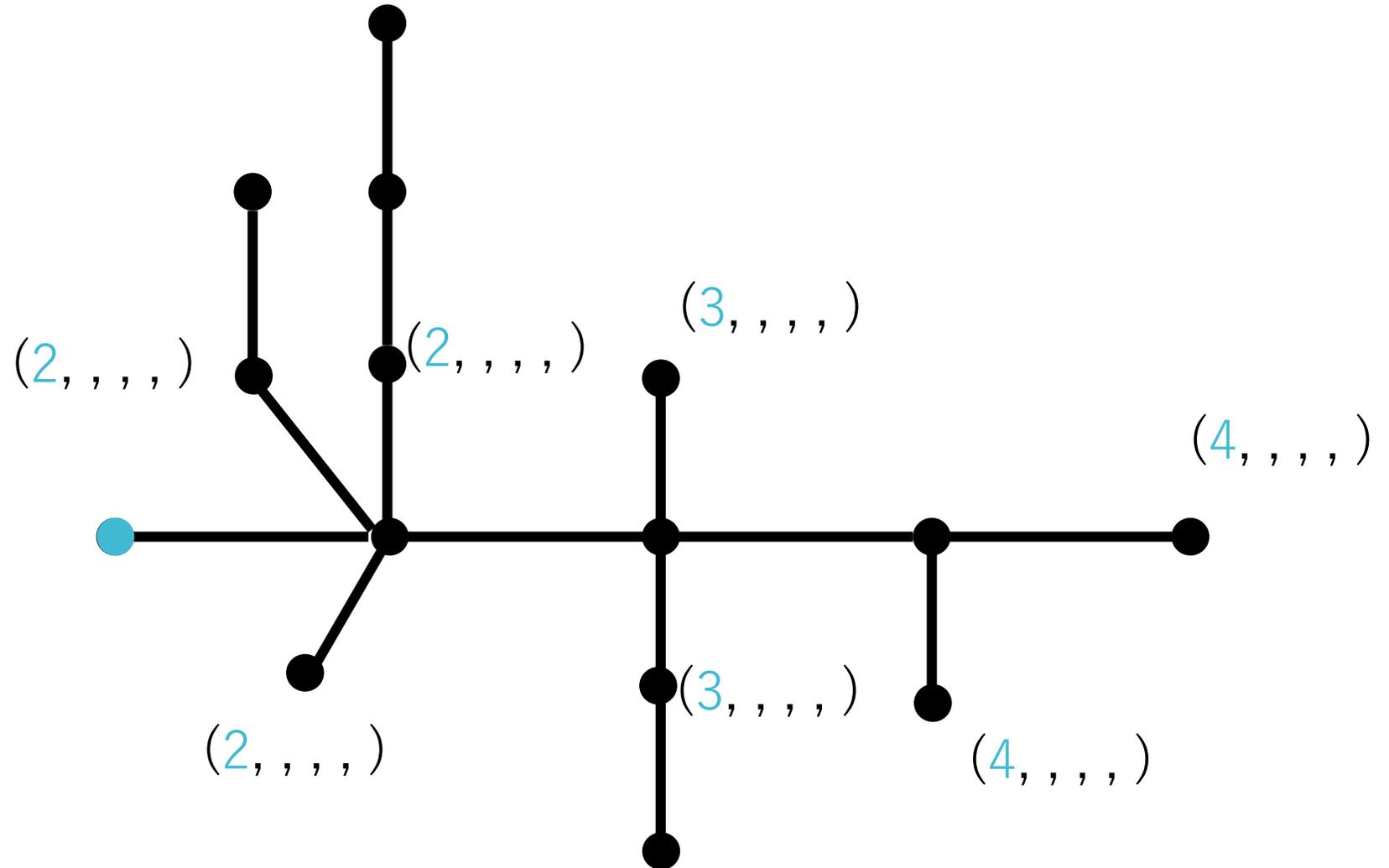
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



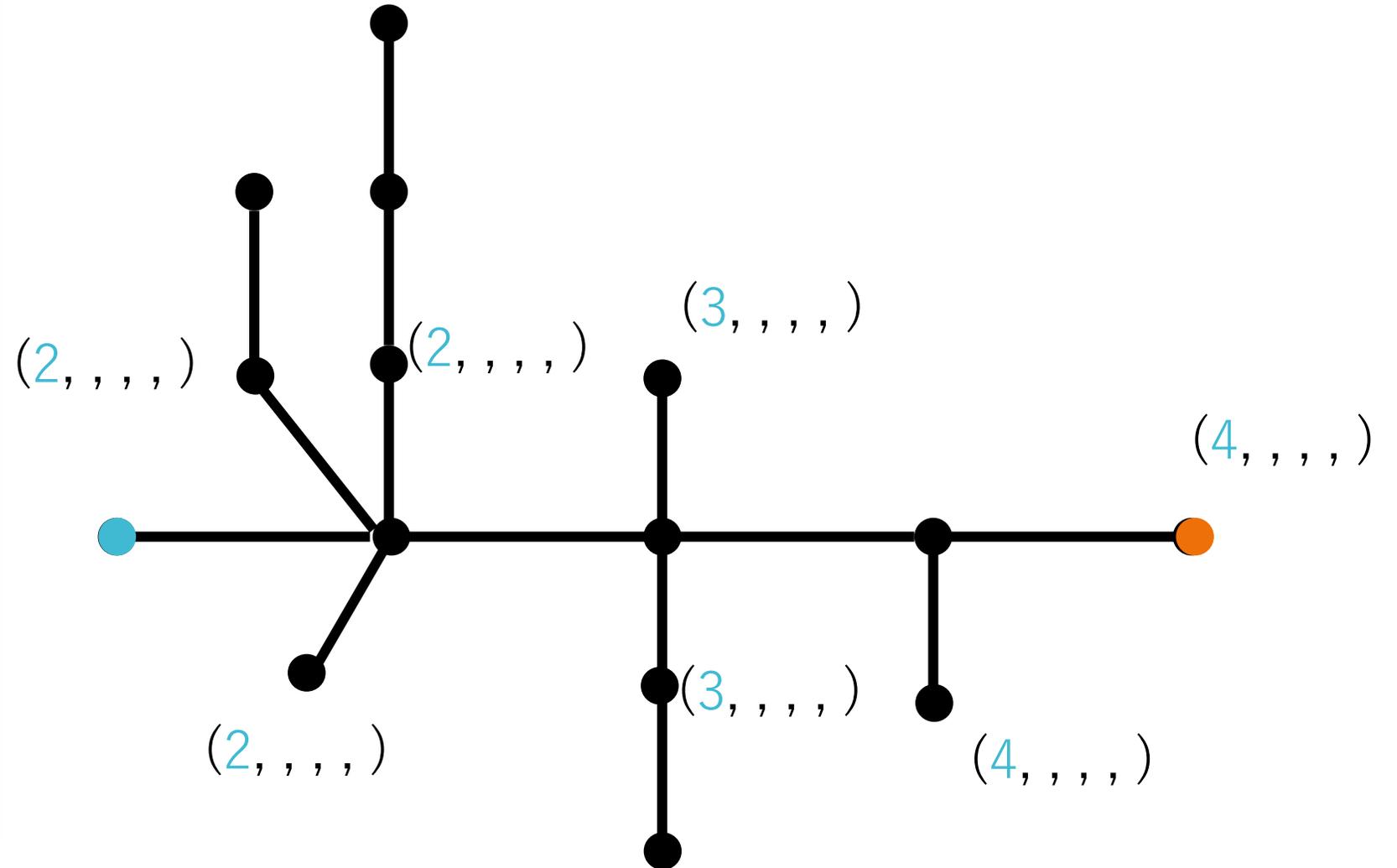
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



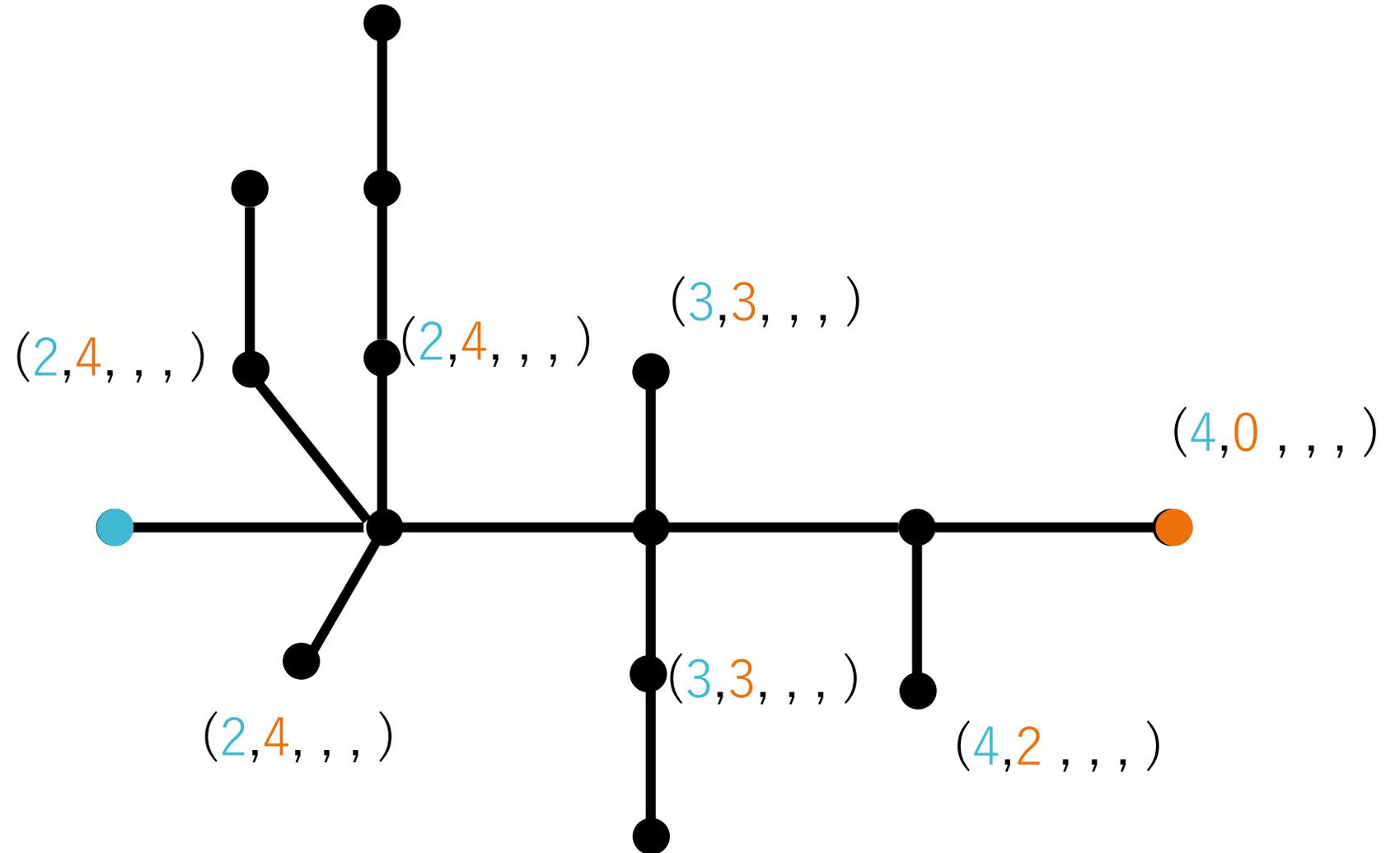
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



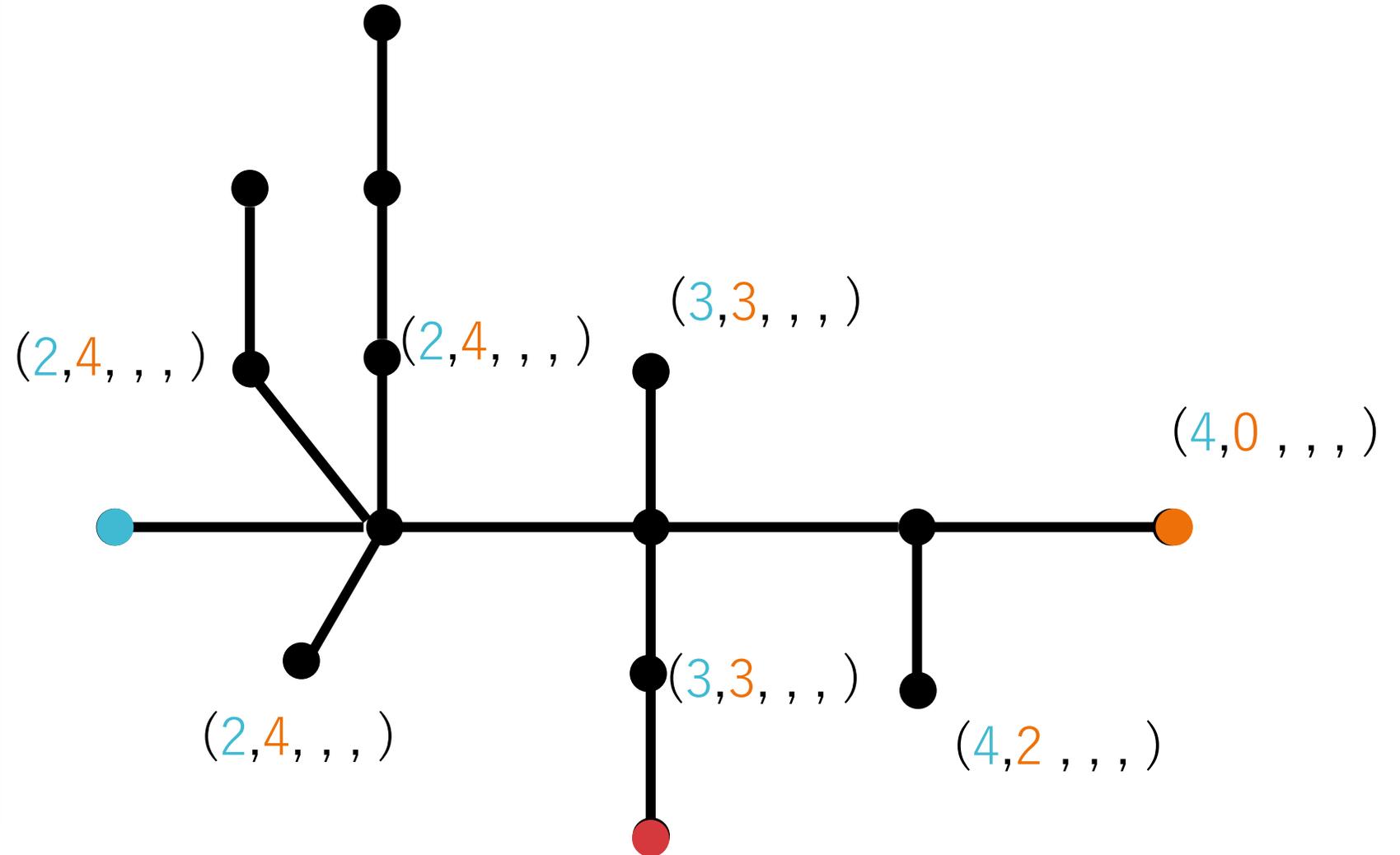
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



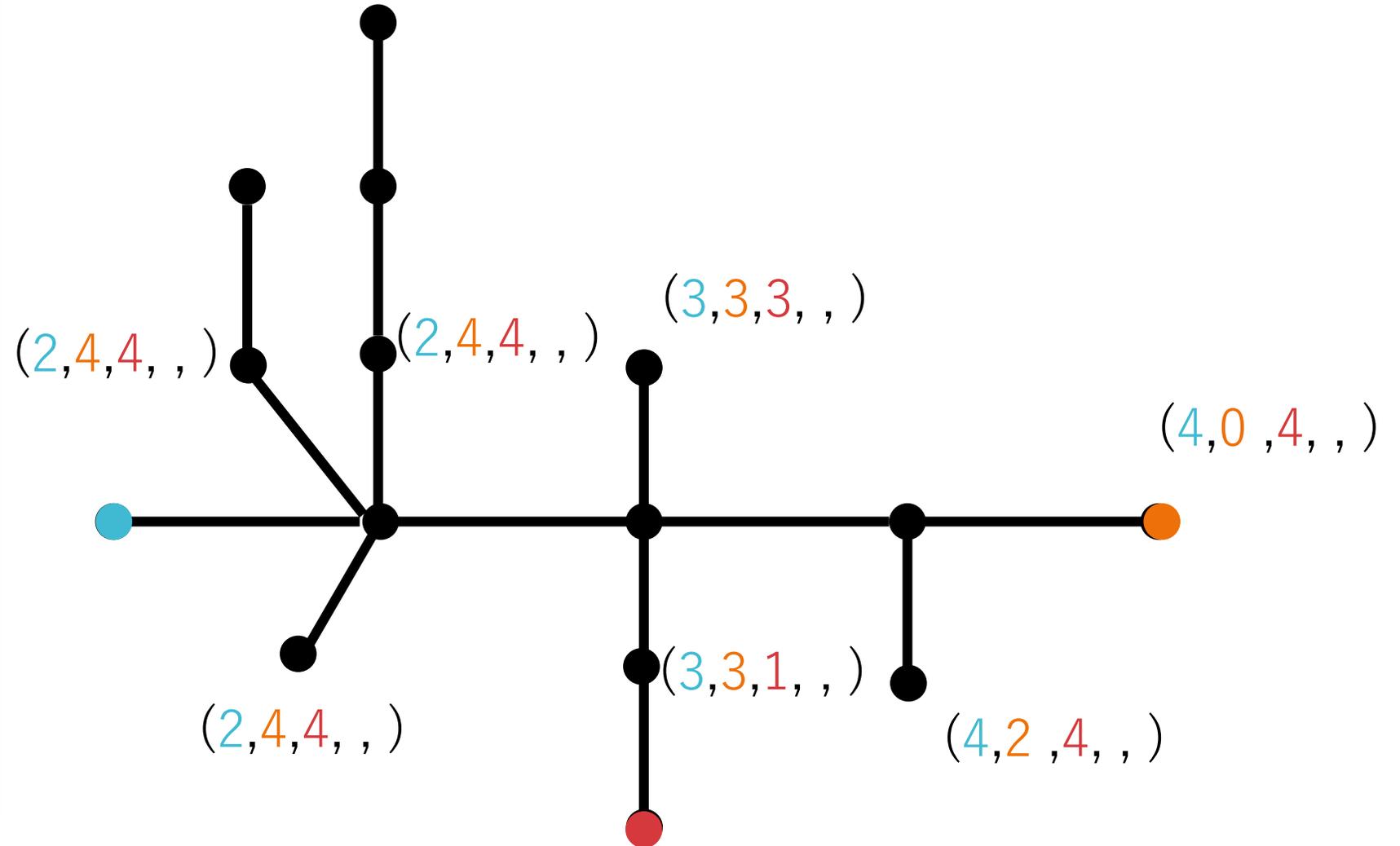
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



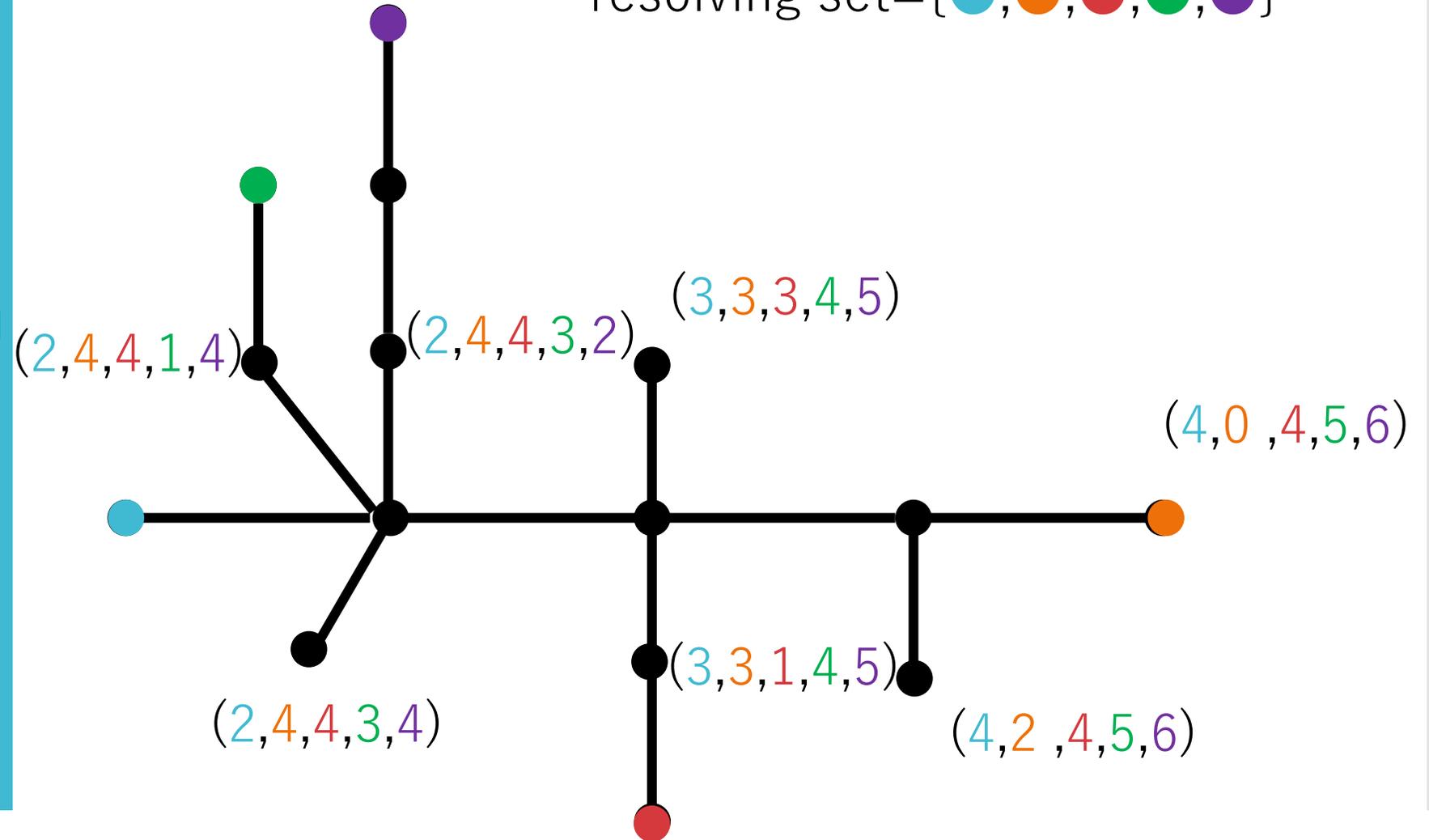
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension



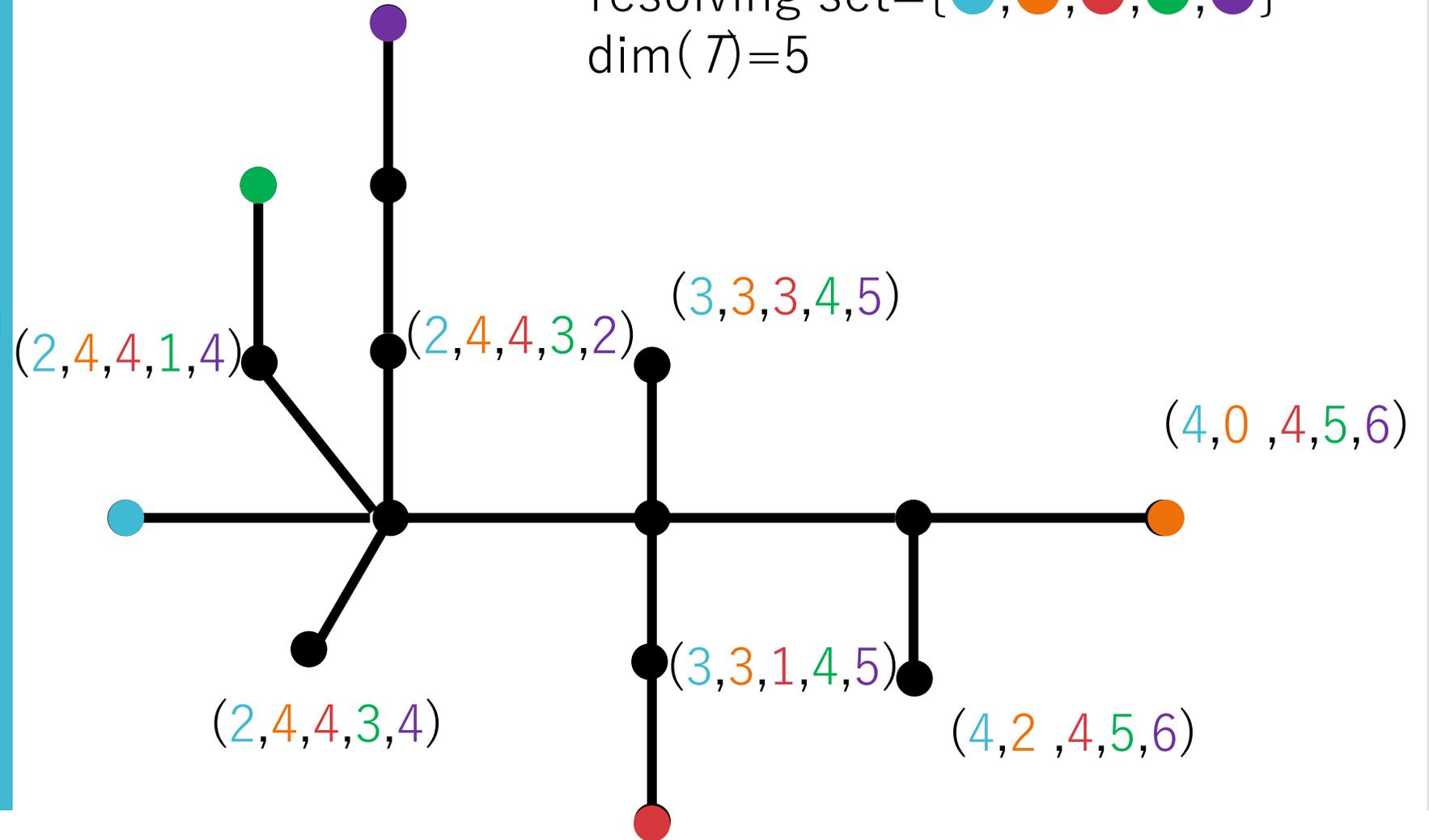
Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension
resolving set = {●, ●, ●, ●, ●}



Metric Dimension とは?

例. 次のグラフ T の Metric dimension
resolving set = {●, ●, ●, ●, ●}
 $\dim(T) = 5$



Metric Dimension の応用例

グラフのノード間の距離

=ネットワーク上でやり取りされるパケットのホップ数

各ノードが受信したパケットのホップ数からデータの送信元を特定するのに必要なノードの最低数がMetric dimension に対応する。

Metric Dimension とSequential Location Number

例にあるような目的では,必ずしも1度に全てのノードが特定できる必要はない。



特定したいノードに合わせて,動的に距離を測るノードを配置すればより少ないノード数で送信元を特定可能になる配置方法が存在し得る。

この場合のノード数に対応する概念がSequential Location Number

Sequential Location Number とは?

定義

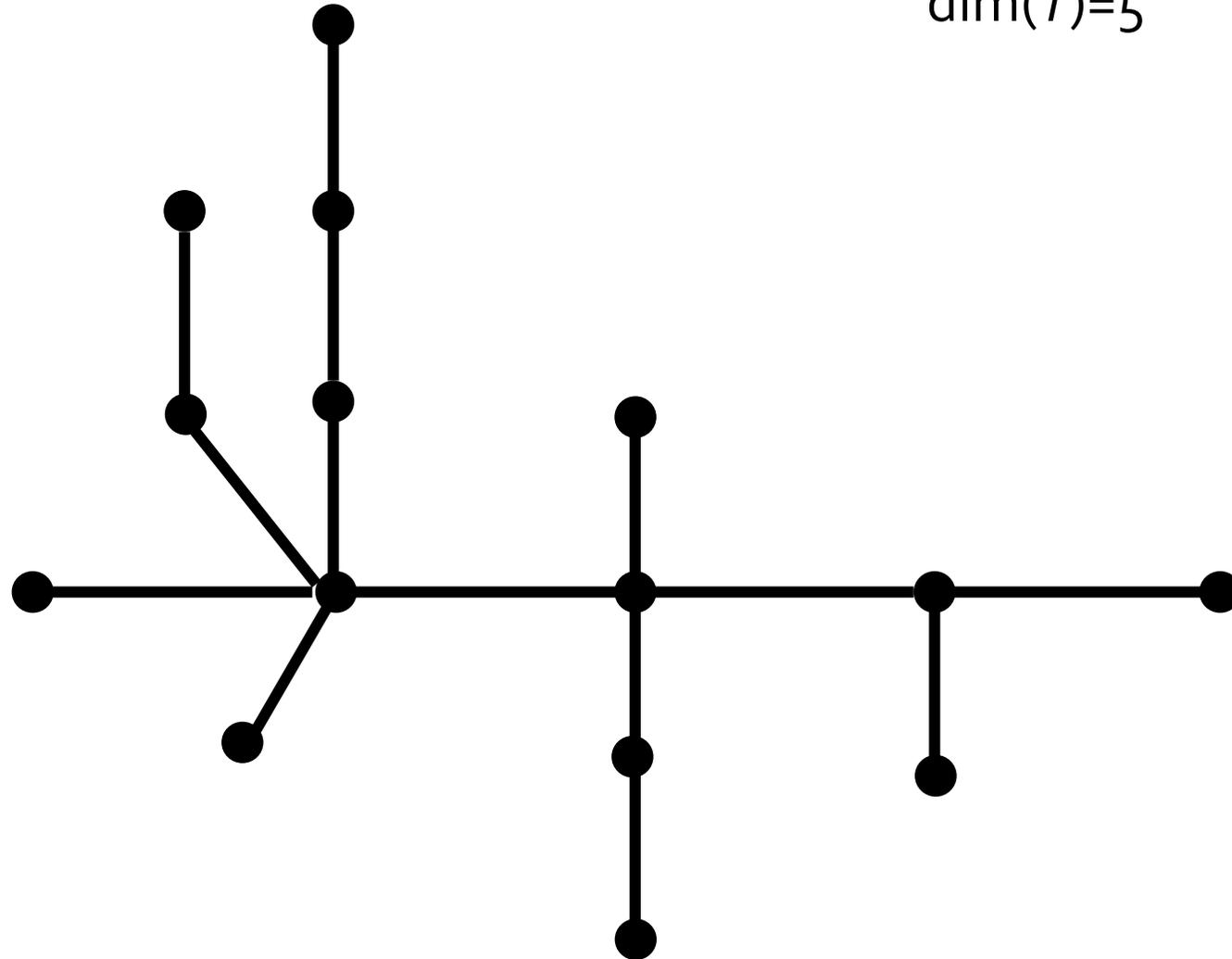
特定したいノードを以下ではMinou, Minouへの距離を測る頂点をprobeとする。

グラフ G において, 1つ前に置かれたprobeからMinouへの距離毎に, 次のprobeを配置する頂点を決める操作をMinouの位置が一意に定まるまで繰り返すゲームを行う。

G に対する全てのゲームを考えた場合, 各ゲーム中で最も特定するためにprobe数を必要とする位置にMinouがいる場合のprobe数の最小値をグラフ G のSequential Location Numberと呼び $SL(G)$ で表す。

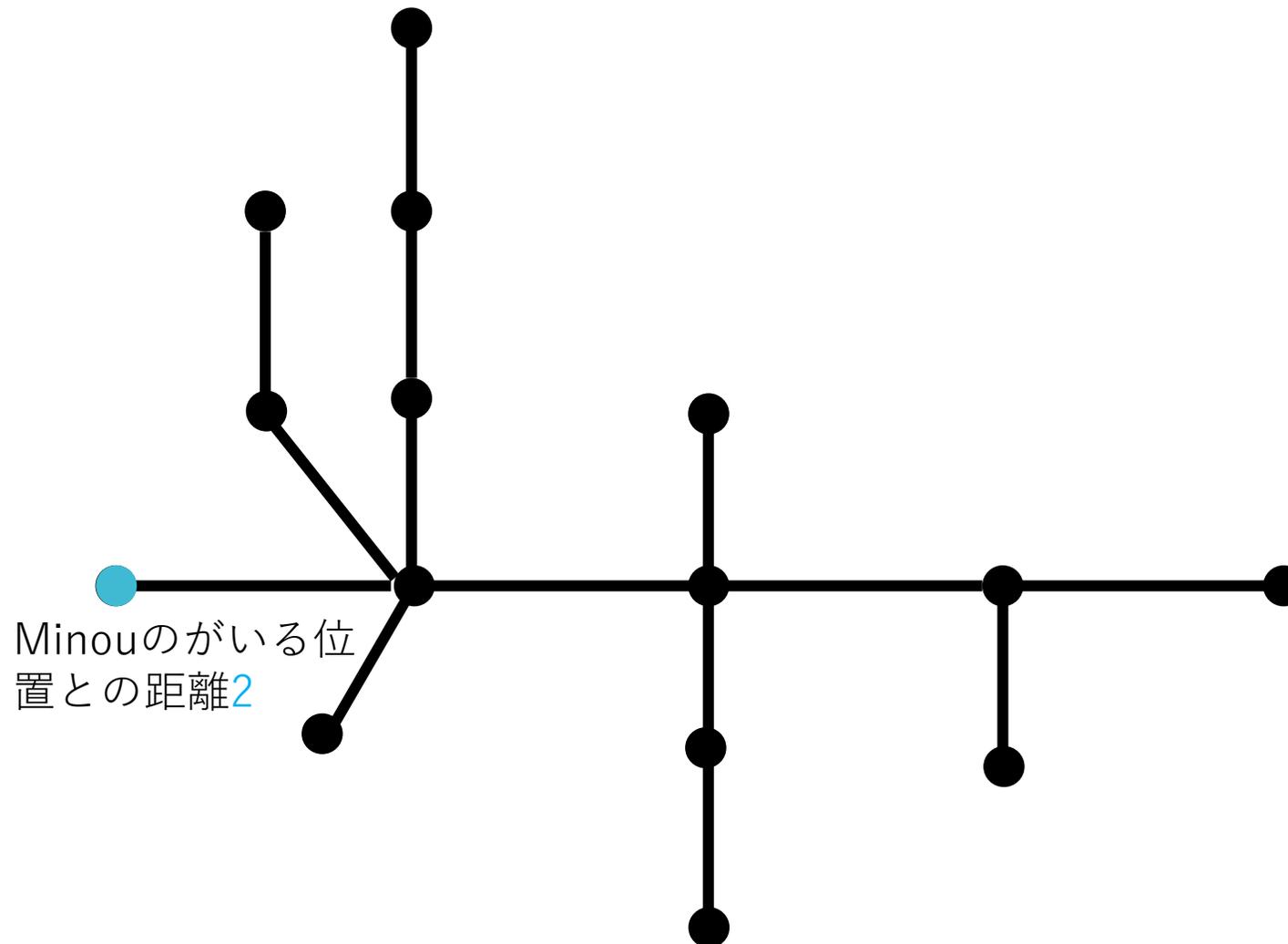
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number
 $\dim(T)=5$



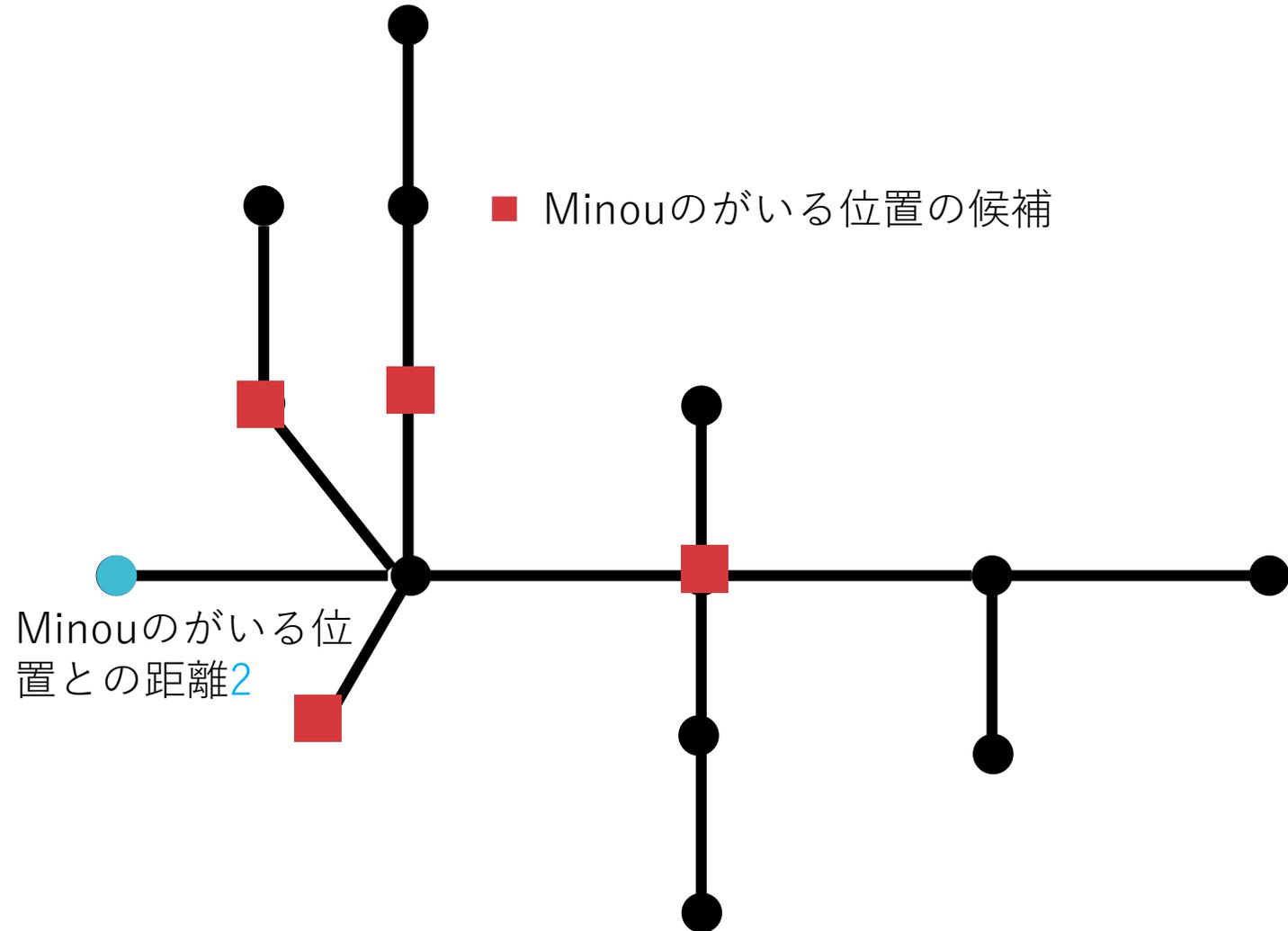
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



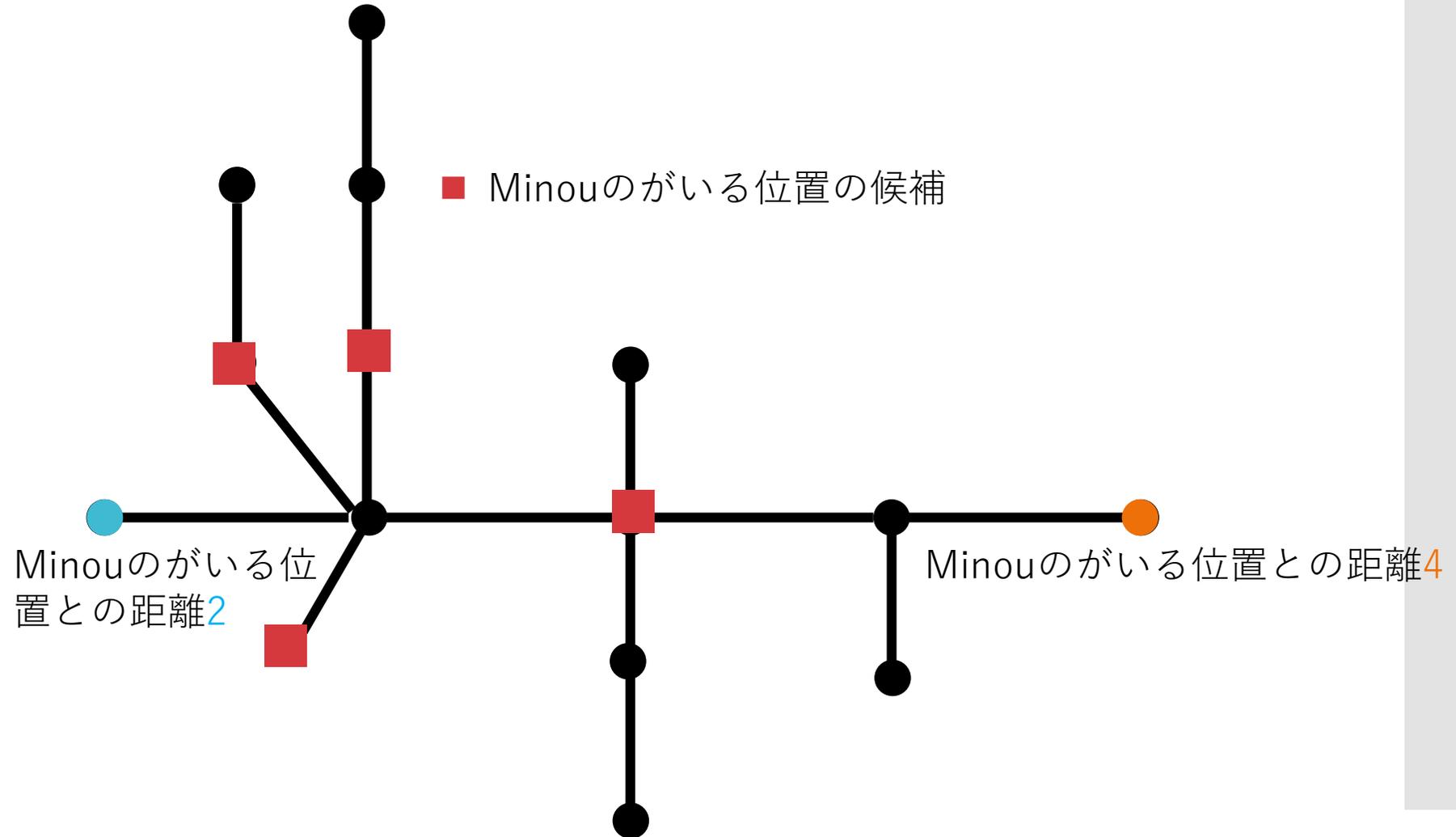
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



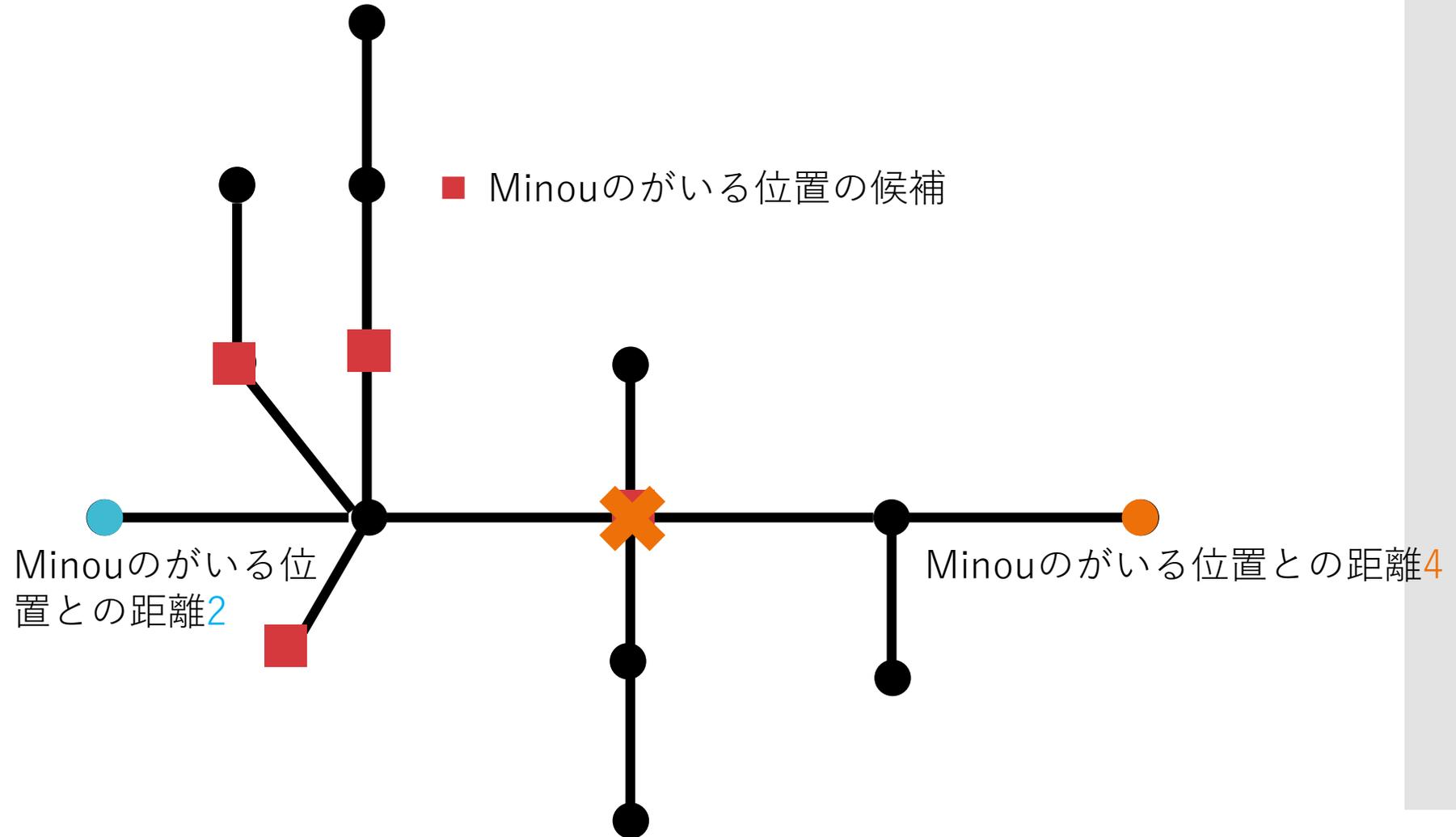
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



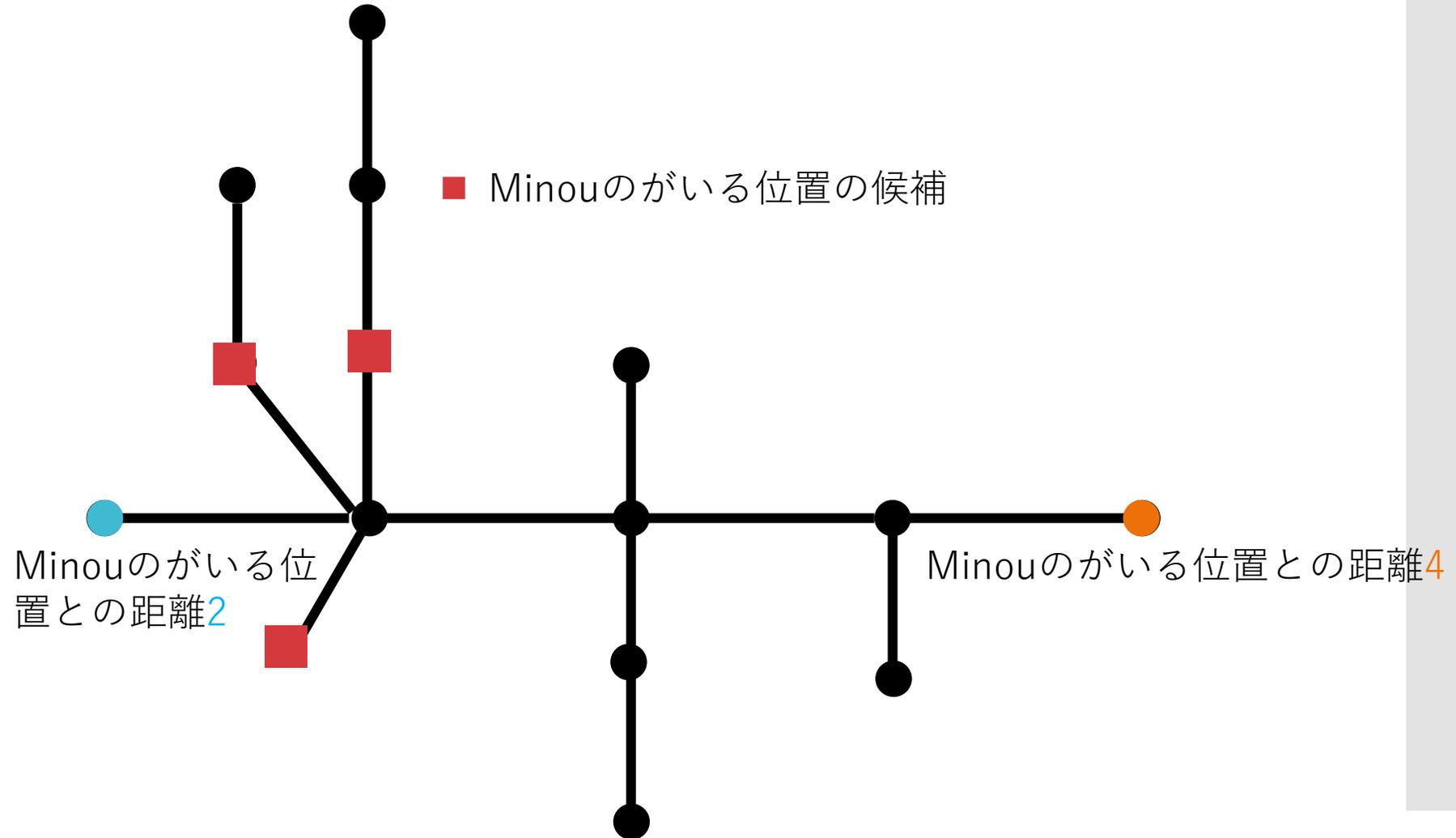
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



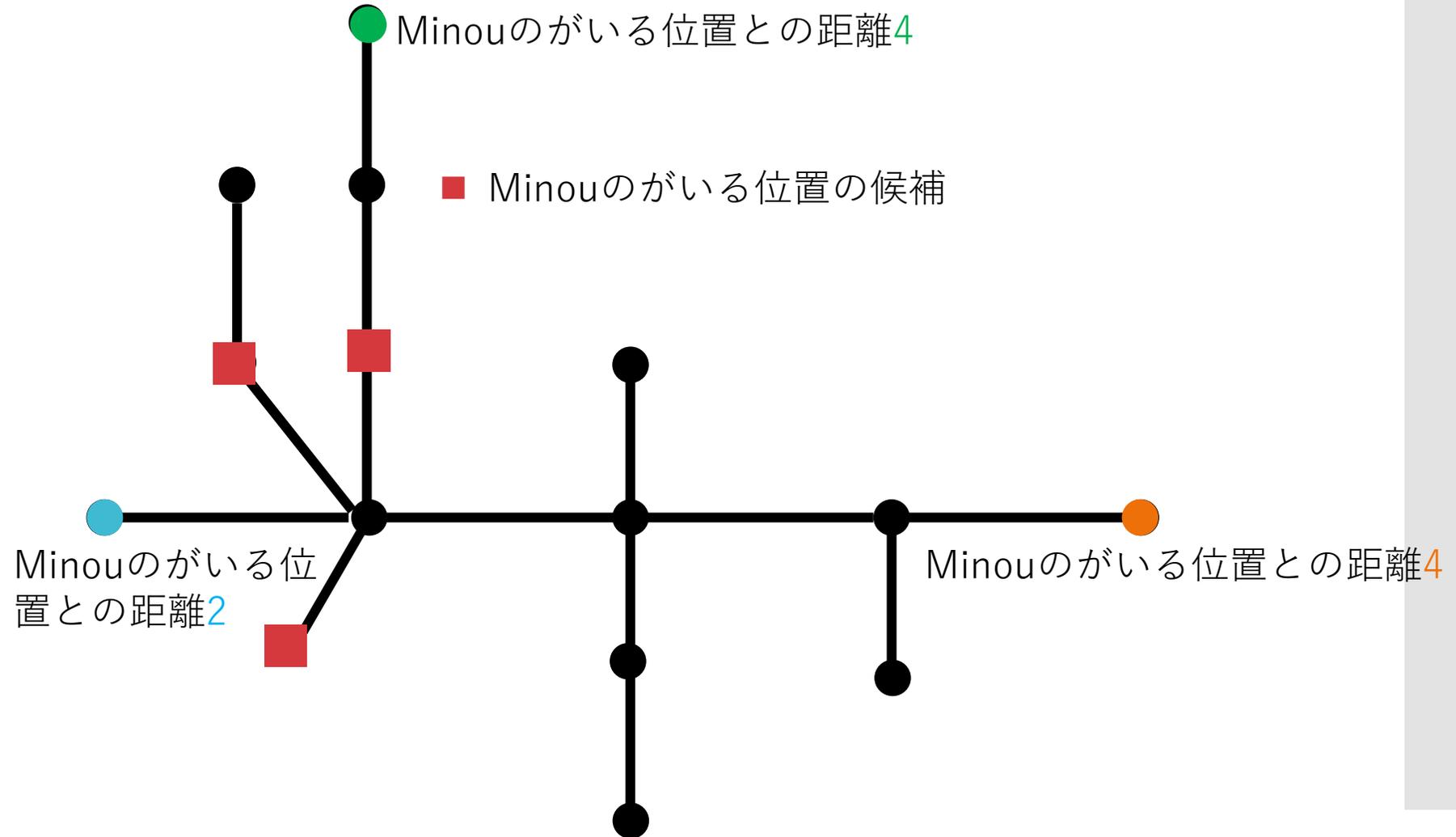
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



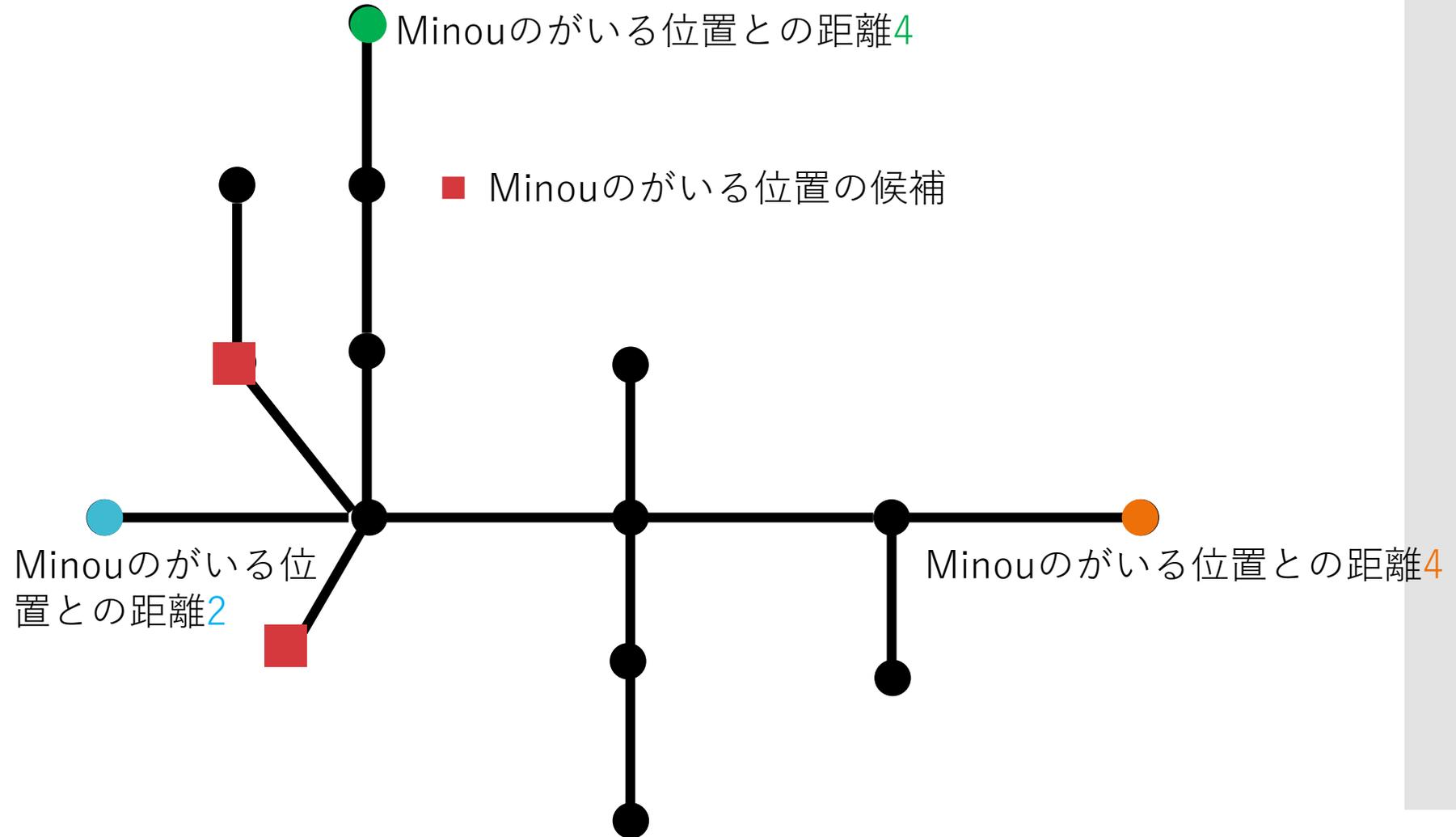
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



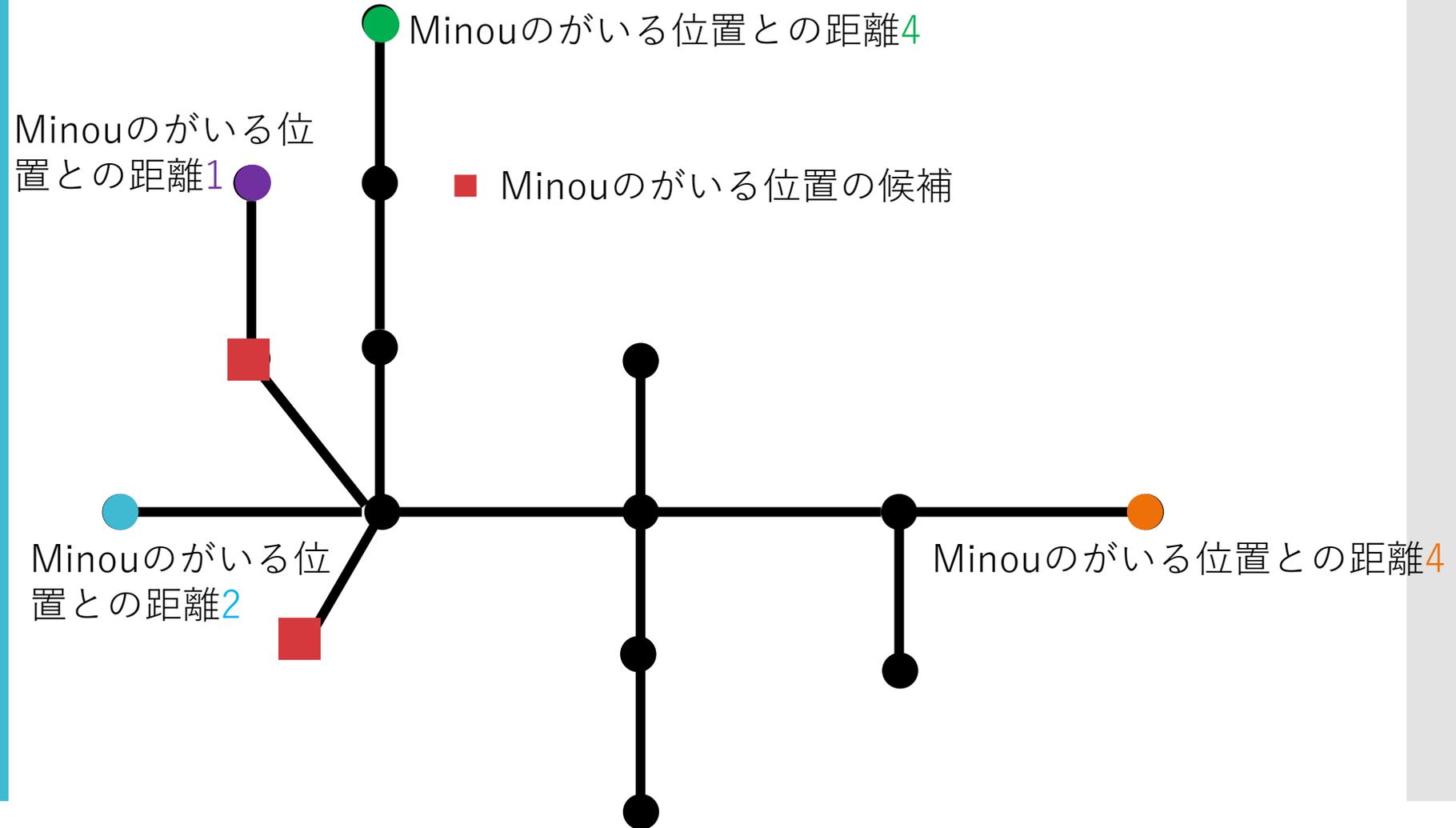
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



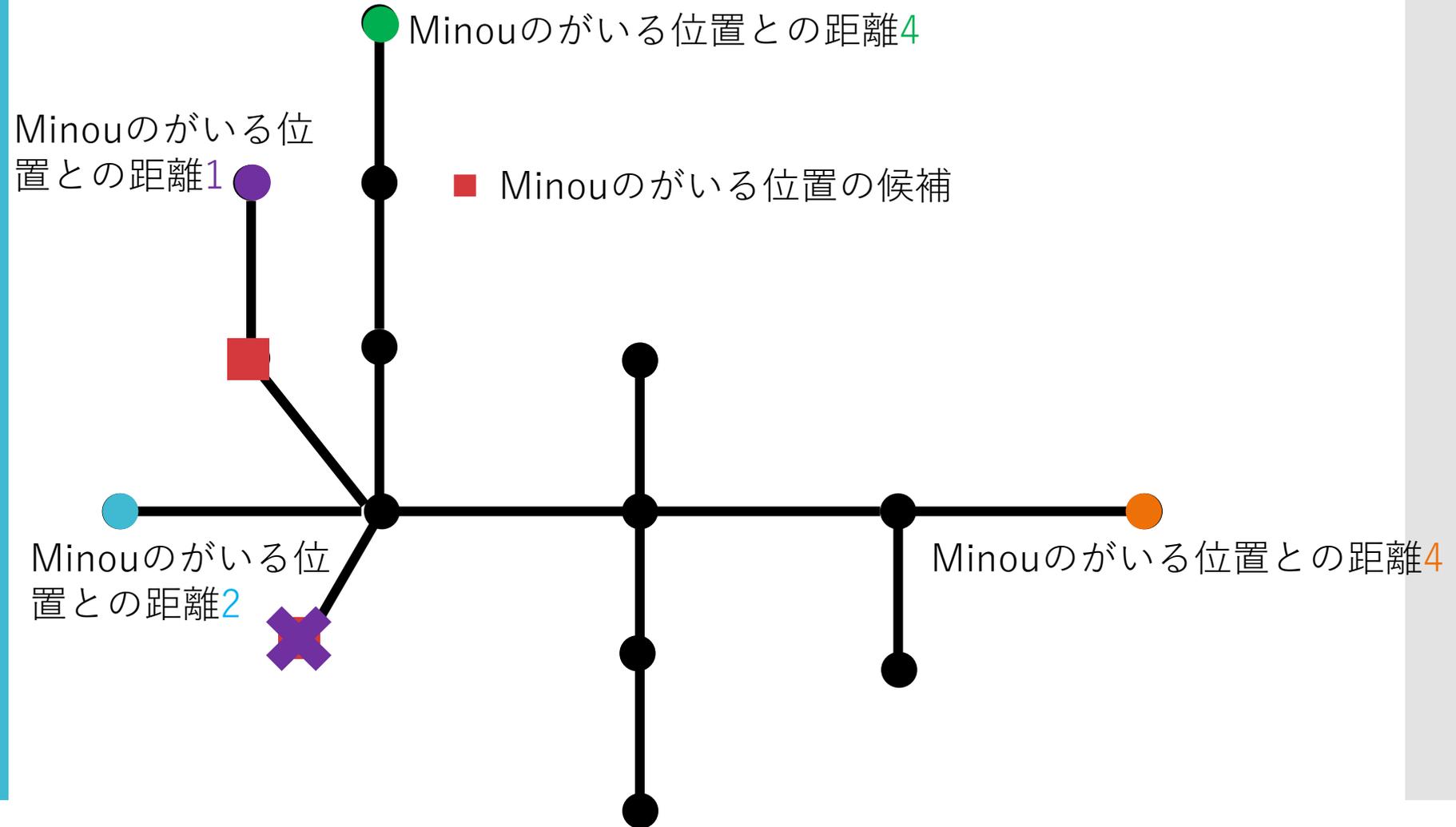
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



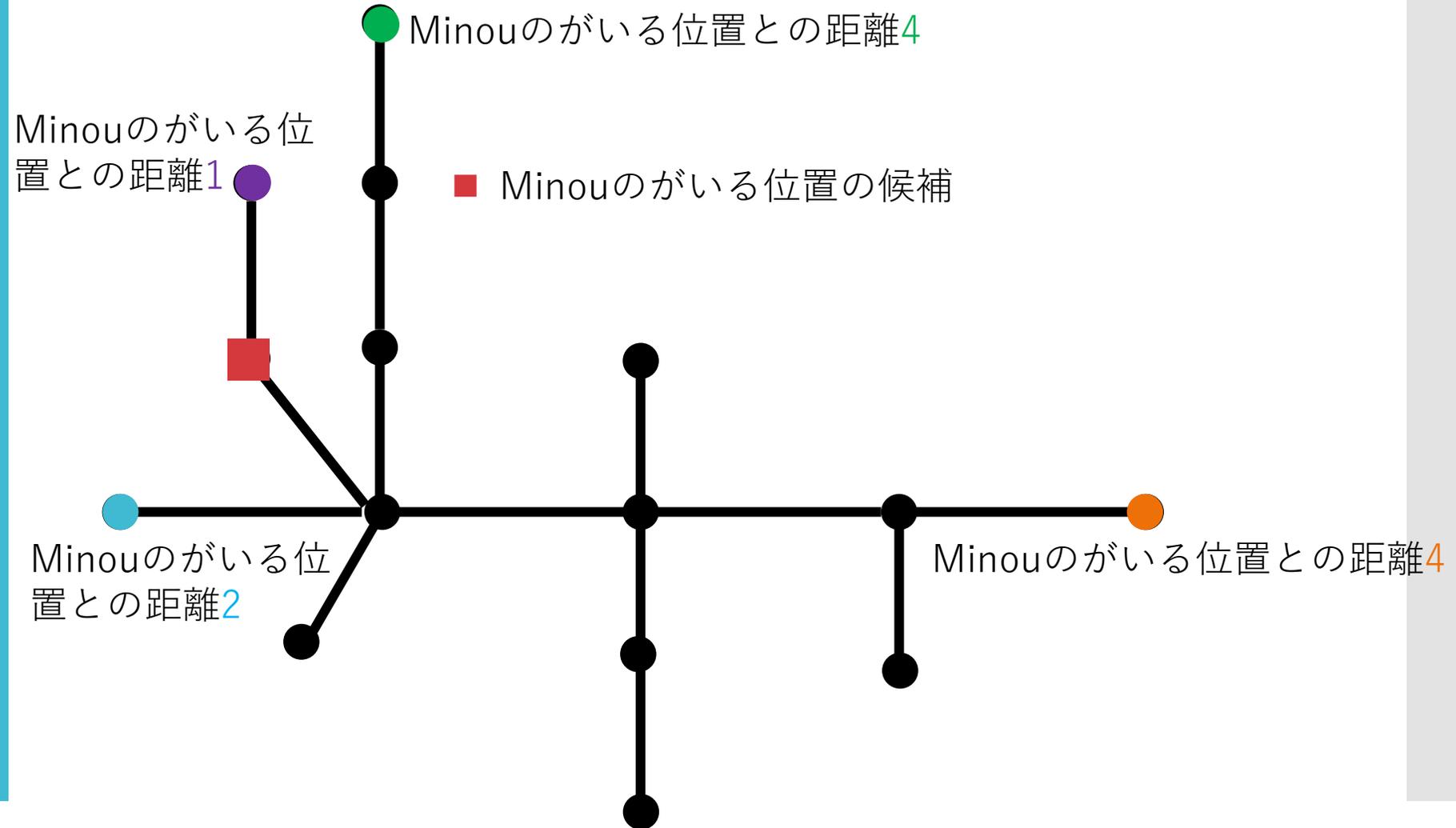
Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number



Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の Sequential Location Number

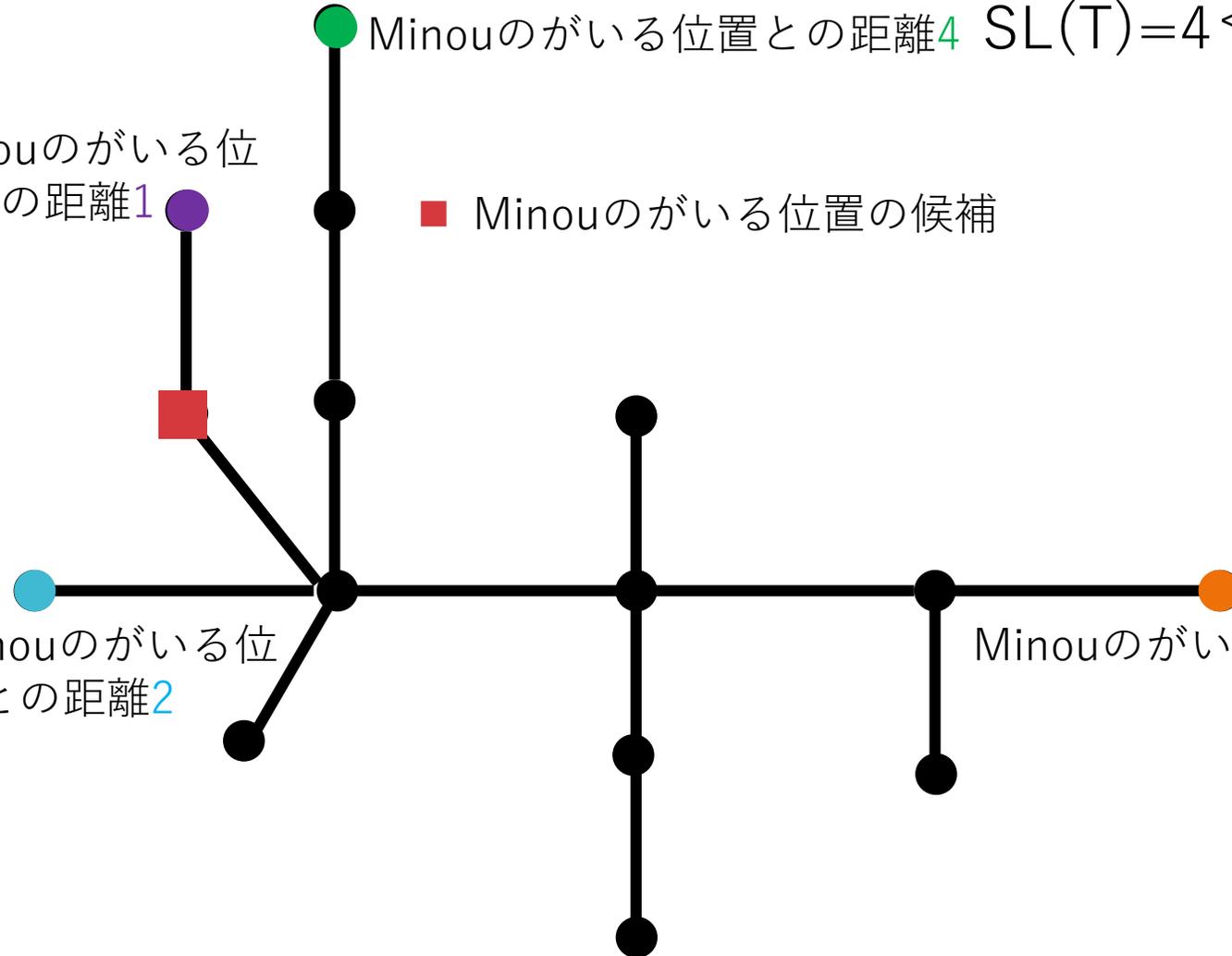
Minouのがいる位置との距離4 $SL(T)=4 < \dim(T)=5$

Minouのがいる位置との距離1

■ Minouのがいる位置の候補

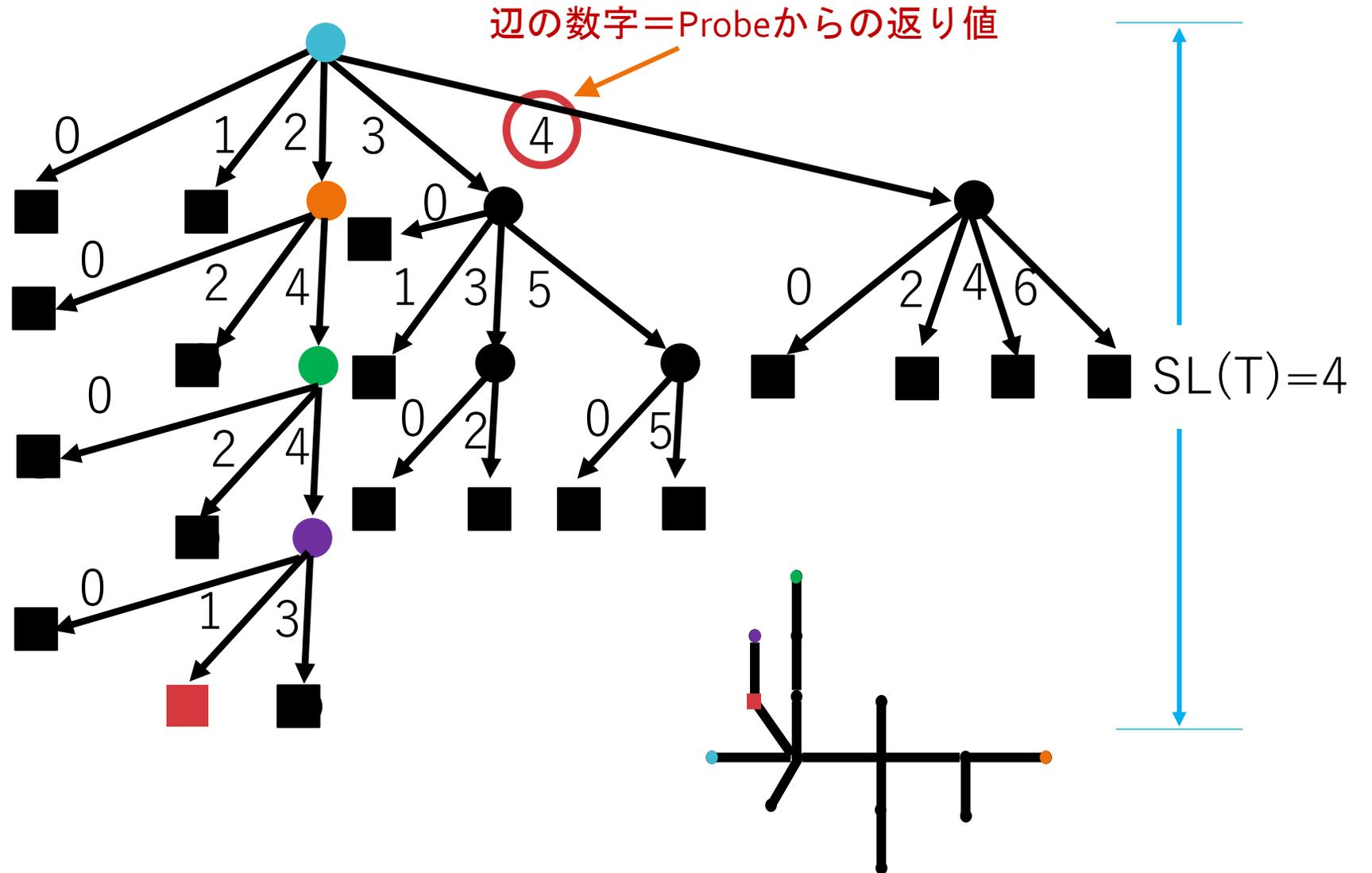
Minouのがいる位置との距離2

Minouのがいる位置との距離4



Sequential Location Number とは?

例. グラフ T の最適な Strategy Tree のひとつ

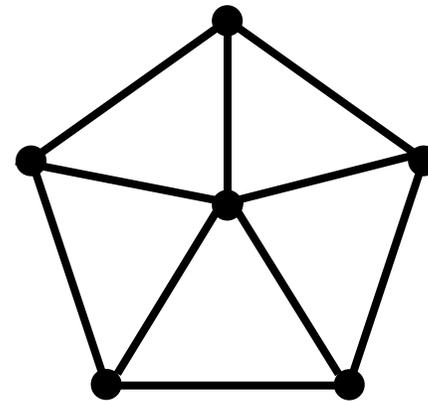


今回の研究動機

先行研究において

定理(Seager,2013)

$$SL(W_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$



W_5

W_n は C_n と K_1 のjoinによって生成されるグラフである。



では C_n とjoinするグラフを変更することや,用いる演算を
変えることで SL はどのように変化するのか？

今回の研究動機

使用する演算 の紹介

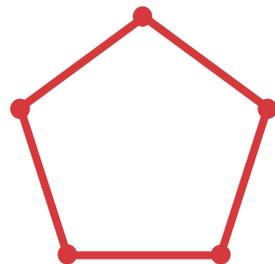
join

2つのグラフ $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$

に対して $V(F) = V(G) \cup V(H), E(F) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$

で定められるグラフ F を G と H の **join** と呼び、 $F = G \vee H$ で表す

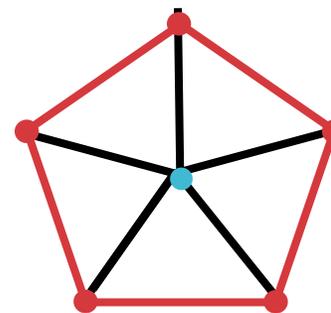
例 $C_5 \vee K_1$



\vee



$=$

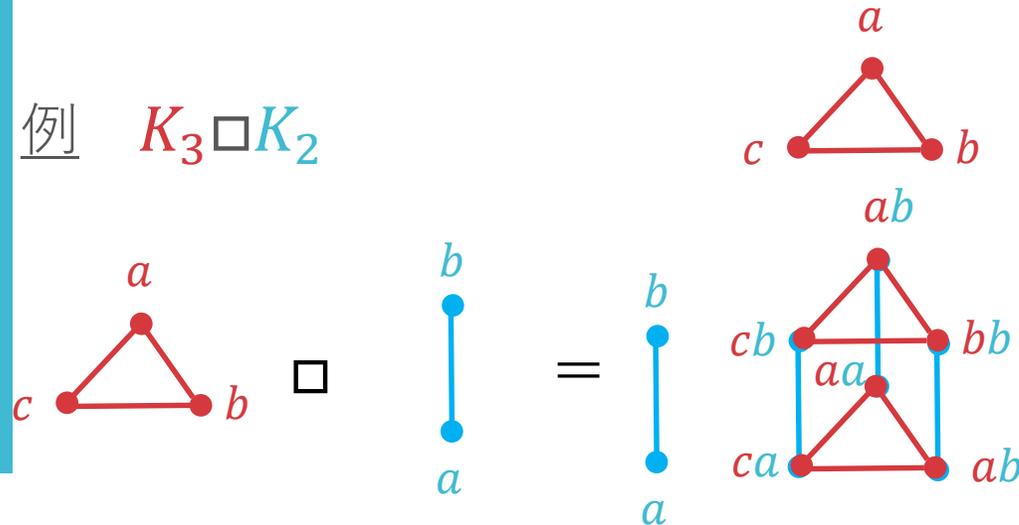


使用する演算 の紹介

Cartesian Product

2つのグラフ $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$
 に対して, $V(F) = \{(u, v) | u \in V(G), v \in V(H)\}$,
 $E(F)$
 $= \{(u, v)(x, y) | u = x \text{かつ } vy \in E(H) \text{または } v = y \text{かつ } ux \in E(G)\}$
 で定まるグラフ F を G と H の **Cartesian Product** と呼び $F = G \square H$
 で表す。

例 $K_3 \square K_2$

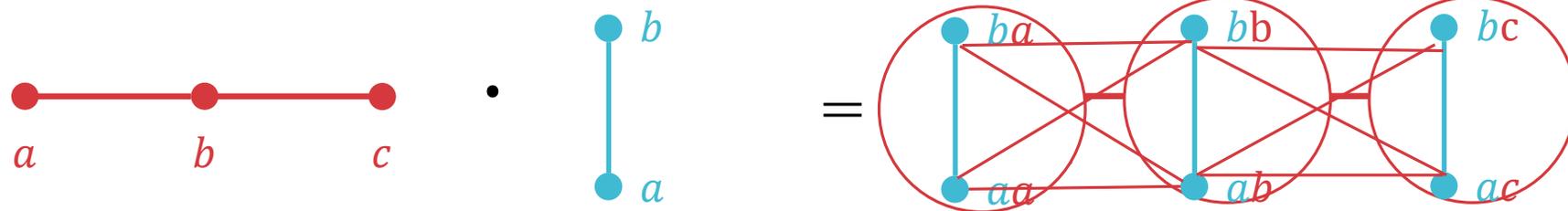


使用する演算 の紹介

Lexicographic Product(辞書式積)

2つのグラフ $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$
に対して, $V(F) = \{(u, v) | u \in V(G), v \in V(H)\}$,
 $E(F) = \{(u, v)(x, y) | u = x \text{ かつ } vy \in E(H) \text{ または } ux \in E(G)\}$
で定まるグラフ F を G と H の **Lexicographic Product** と呼び
 $F = G \cdot H$ で表す。

例 $P_3 \cdot P_2$



Joinにより生成
されるグラフに
ついての結果

定理 1

n, m を $n \geq 4, m \geq 2$ を満たす自然数であるとする

$$SL(C_n \vee mK_1) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor & m \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 & \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor < m < \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3 \\ m - 1 & m \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3 \end{cases}$$

Joinにより生成 されるグラフ についての結果

定理2

n, m を $n \geq m \geq 6$ を満たす自然数であるとするとき

$$SL(C_n \vee C_m) = \begin{cases} \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} + 1 & \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

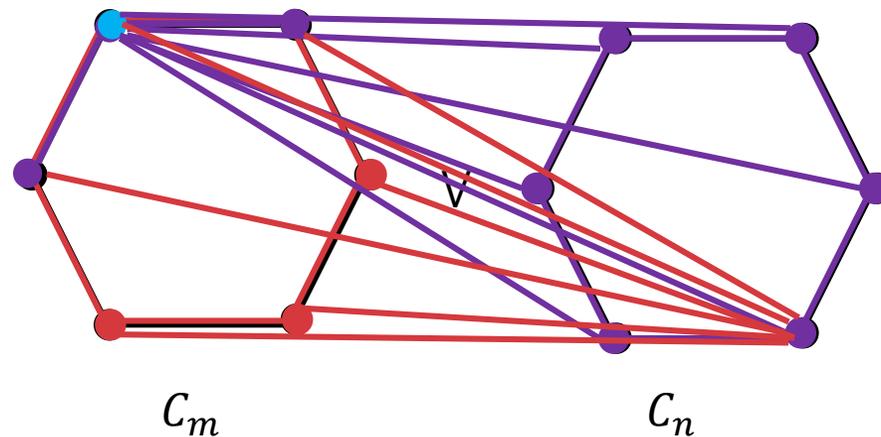
Joinにより生成されるグラフ についての結果

定理2の証明の概要

C_n と C_m の頂点は互いに一方の全ての頂点に隣接していることによって、1手目のprobeが置かれた時点で $C_n \vee C_m$ の頂点に対する探索は

$C_m - \alpha$ の頂点のみに対する探索, C_n の頂点+ α のみに対する探索に別れる。

距離2

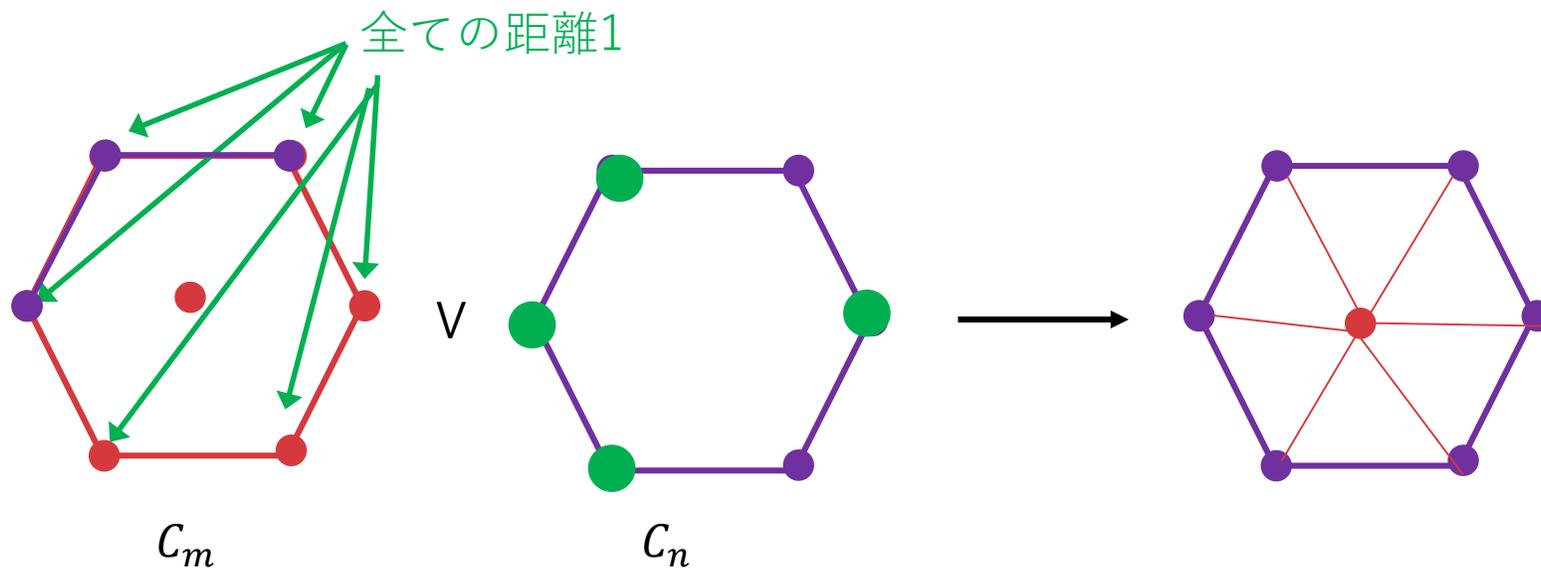


Joinにより生成されるグラフ についての結果

定理2の証明の概要

各サイクルの頂点に対する探索について考えると C_n からみた C_m 上に頂点に対する距離は全て同じである。

→そこで C_m を抽象的に1つの頂点とみなすことによってこの場合における C_n の頂点の探索を W_n の頂点に対する探索に帰着させることにより定理を示す。



Cartesian
Productにより
生成される
グラフについて
の研究結果

定理3

n, m を $n \geq 4, m \geq 1$ を満たす自然数であるとするとき

$$SL(C_n \square P_m) = \begin{cases} 2 & n: \text{odd} \\ 3 & n: \text{even} \end{cases}$$

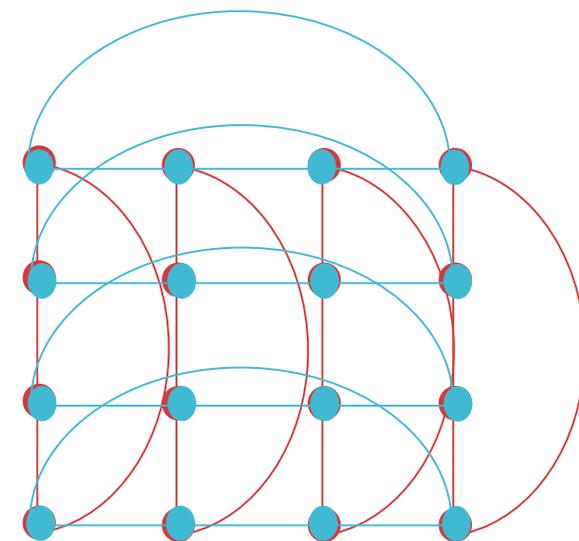
Cartesian Productにより生成されるグラフについての研究結果

定理4

n, m を $n \geq m \geq 4$ を満たす自然数であり n と m のいずれも偶数である時

$$SL(C_n \square C_m) \leq 4$$

$C_4 \square C_4$



Cartesian
Productにより
生成される
グラフについて
の研究結果

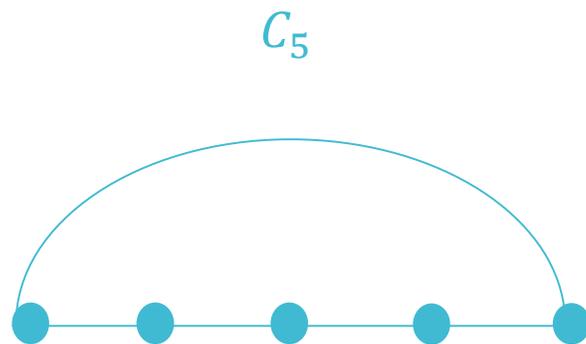
定理5

n, m を $n \geq m \geq 4$ を満たす自然数であり $n: odd$ または $m: odd$ である時

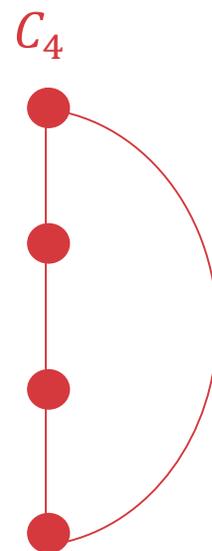
$$SL(C_n \square C_m) = 3$$

Cartesian
Productにより
生成される
グラフについて
の研究結果

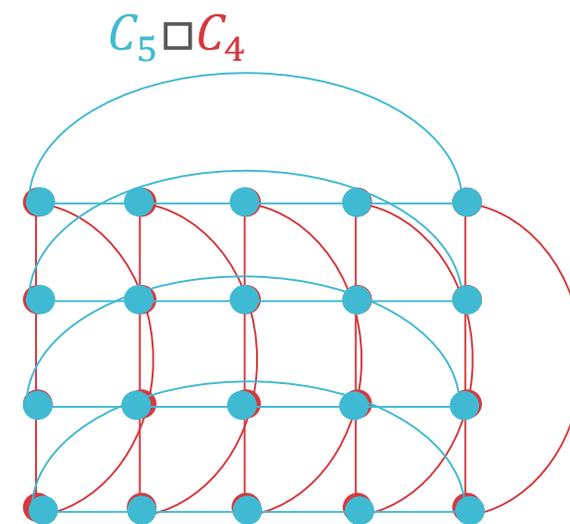
例 $C_5 \square C_4$



\square



$=$



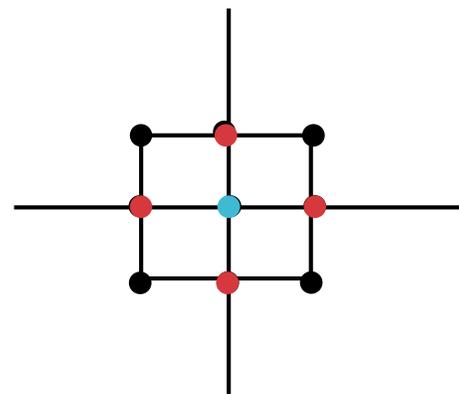
Cartesian Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

(1) $SL(C_n \square C_m) \geq 3$ であることの証明の概要

グラフの対称性から1手目のprobeがどこに置かれたとしても議論の一般性を失わない。

→場合わけにより,2手目のprobeをどのようにおいても1手目のprobeの近傍の頂点のうち2頂点は区別できないものが存在することを示す。



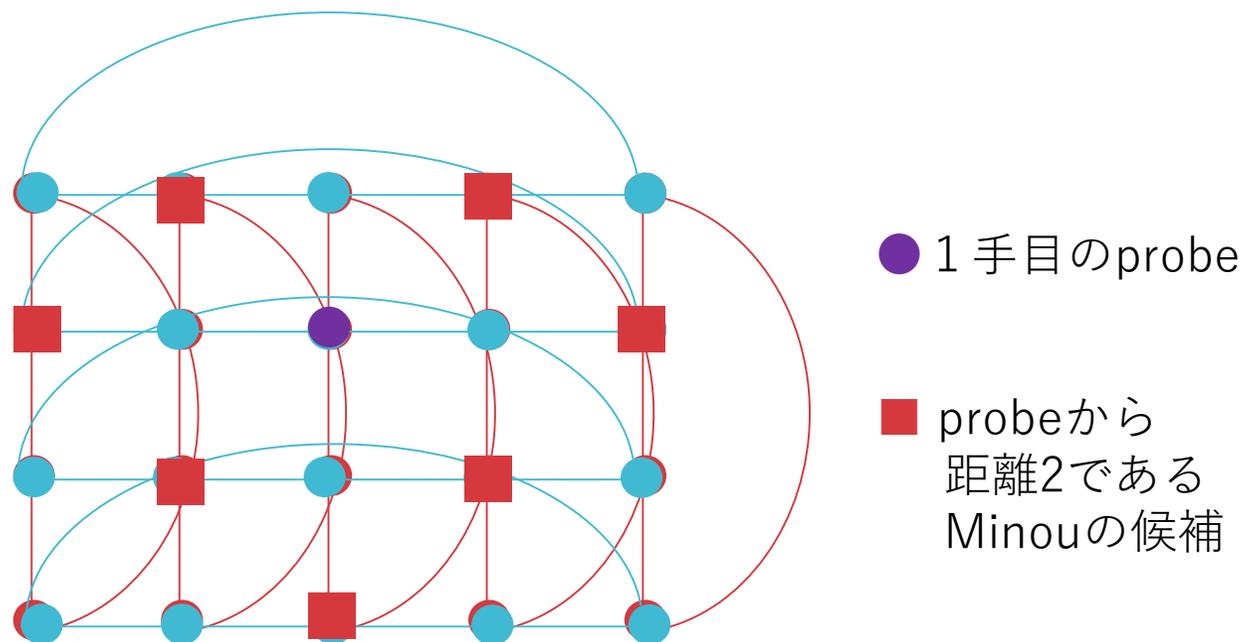
● probe
● probeの近傍

Cartesian Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

(2) $SL(C_n \square C_m) \leq 3$ であることの証明の概要

$C_n \square C_m$ において1手目のprobeから距離 k のMinouは例外を除きprobeの置かれた頂点を左右対称の位置にそれぞれ同数の候補が存在する。

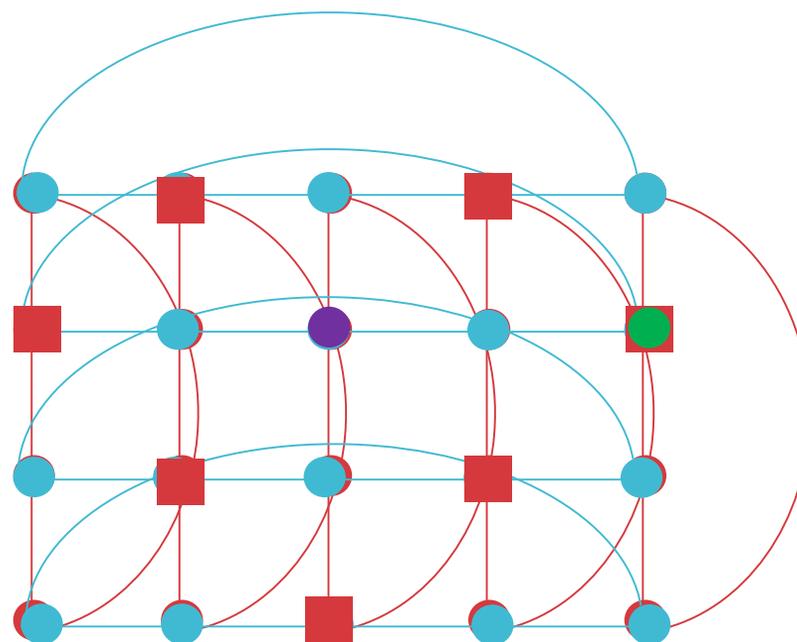


Cartesian Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

(2) $SL(C_n \square C_m) \leq 3$ であることの証明の概要

このとき, 1手目のprobeから同一の奇数サイクル上にあり距離がもっと遠い頂点に2手目のprobeを置く。



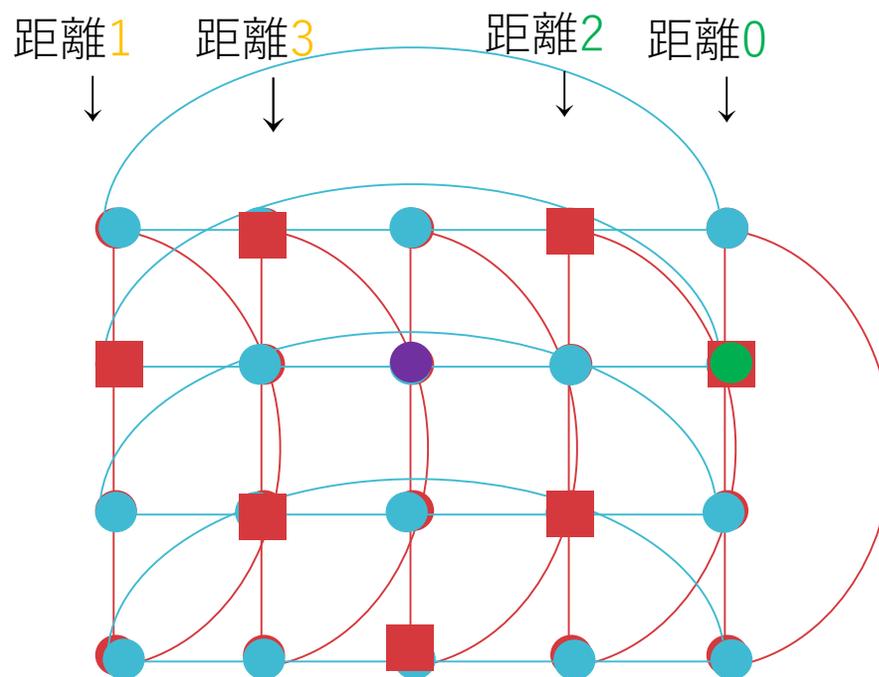
- 1手目のprobe
- 2手目のprobe
- 1手目のprobeから距離2であるMinouの候補

Cartesian Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

(2) $SL(C_n \square C_m) \leq 3$ であることの証明の概要

このとき, 1手目のprobeについてどちら側にいるかによって2手目のprobeからのMinouへの距離の偶奇が異なる



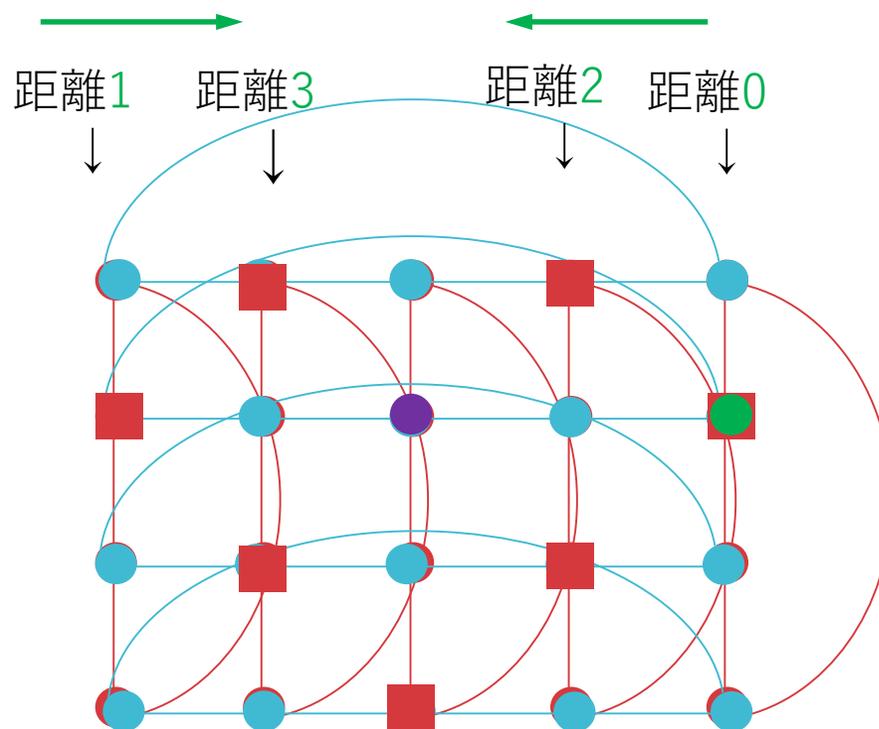
- 1手目のprobe
- 2手目のprobe
- 1手目のprobeから距離2であるMinouの候補

Cartesian Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

(2) $SL(C_n \square C_m) \leq 3$ であることの証明の概要

さらに, 1手目のprobeについて片側にいるMinouへの2手目のprobeからの距離は1手目のprobeの向きに向けて単調増加となる



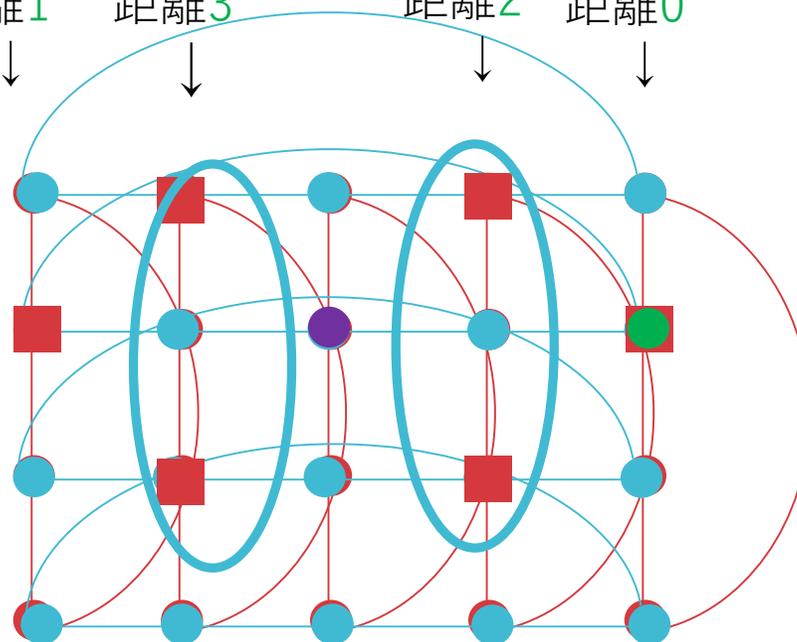
Cartesian Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

(2) $SL(C_n \square C_m) \leq 3$ であることの証明の概要

この時点で、2つのprobeから距離が等しいの頂点は高々2つであるので、いずれか一方に3手目のprobeをおけばMinouが必ず特定される。

距離1 距離3 距離2 距離0



- 1手目のprobe
- 2手目のprobe
- 1手目のprobeから距離2であるMinouの候補

Lexicographic
Productにより
生成される
グラフについて
の研究結果

定理6

n, m が $n \geq 7, m \geq 4$ を満たす自然数であるとき

$$SL(C_n \cdot C_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + 2$$

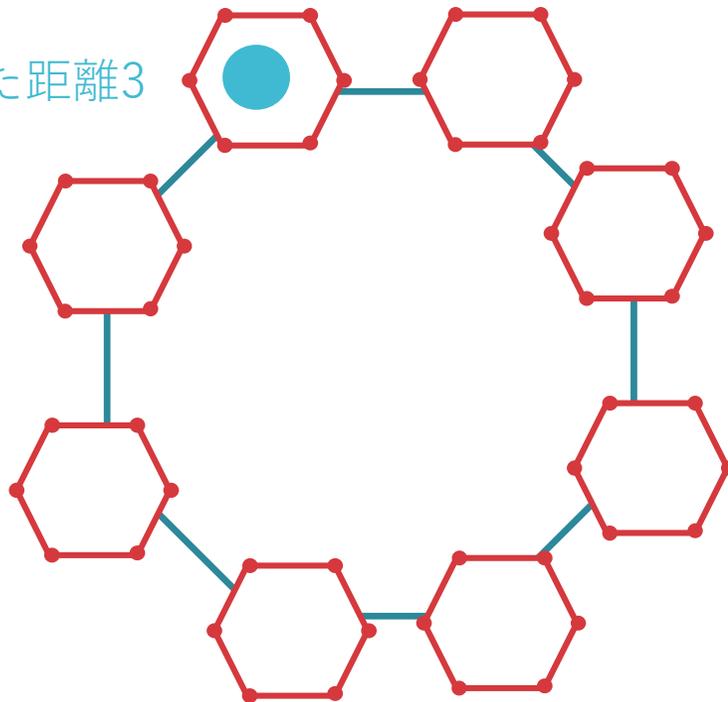
Lexicographic Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

$C_n \cdot C_m$ は C_m が n 個並び隣接するもの同士が join したグラフになる。

1手目の probe が置かれた時点で, Minou がいる C_m の候補が 2 つに絞られる。

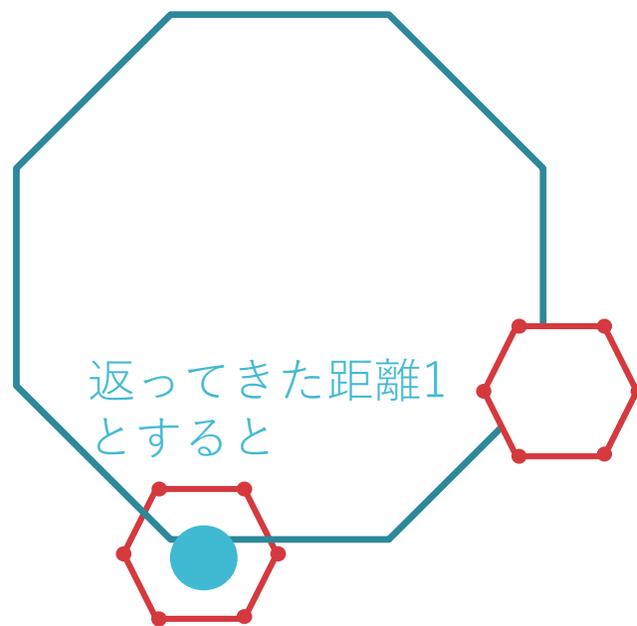
返ってきた距離3
とすると



Lexicographic Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

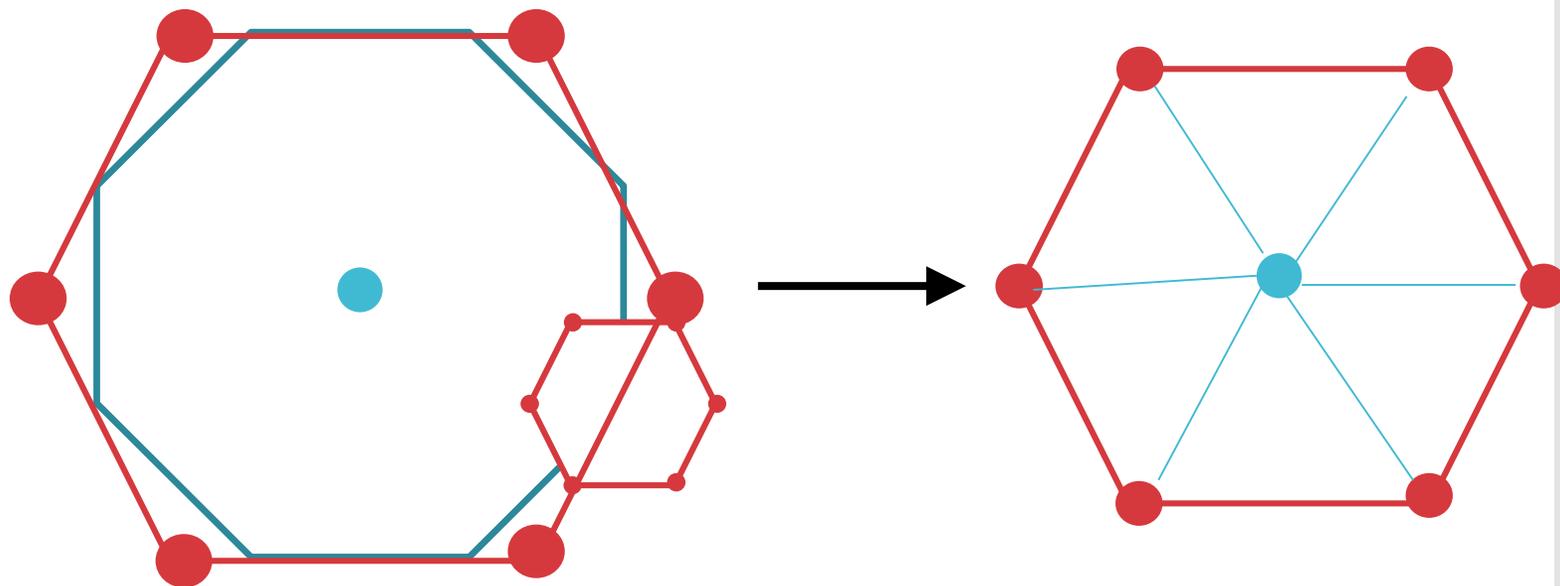
2手目のprobeを1手目のprobeから距離 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ の C_m に置くことで,Minouのいる C_m を特定できる。



Lexicographic Productにより生成されるグラフについての研究結果

証明の概要

さらに C_m 上での探索を,隣接する C_m を1つの頂点とみなすことで W_m 上での探索に帰着させることで,定理を示す。



まとめ

今回の研究では、 $SL(C_n \vee mK_1)$, $SL(C_n \vee C_m)$, $SL(C_n \square P_m)$
 $SL(C_n \cdot C_m)$ を求めることができた。また、条件付きでは
あるが $SL(C_n \square C_m)$ を求めることができた。

今後の課題

- $SL(C_n \square C_m)$ を n, m がともに偶数である場合についても求めたい。
- 今回の研究に見られたようなjoinやLexicographic Product演算において一方のグラフの頂点数に依存しない SL が得られるものはどのようなグラフであるのかを調べたい。

最後に

ご清聴ありがとうございました