

木のRadial性を判定する 高速なアルゴリズム

斎藤研究室 五十嵐正広

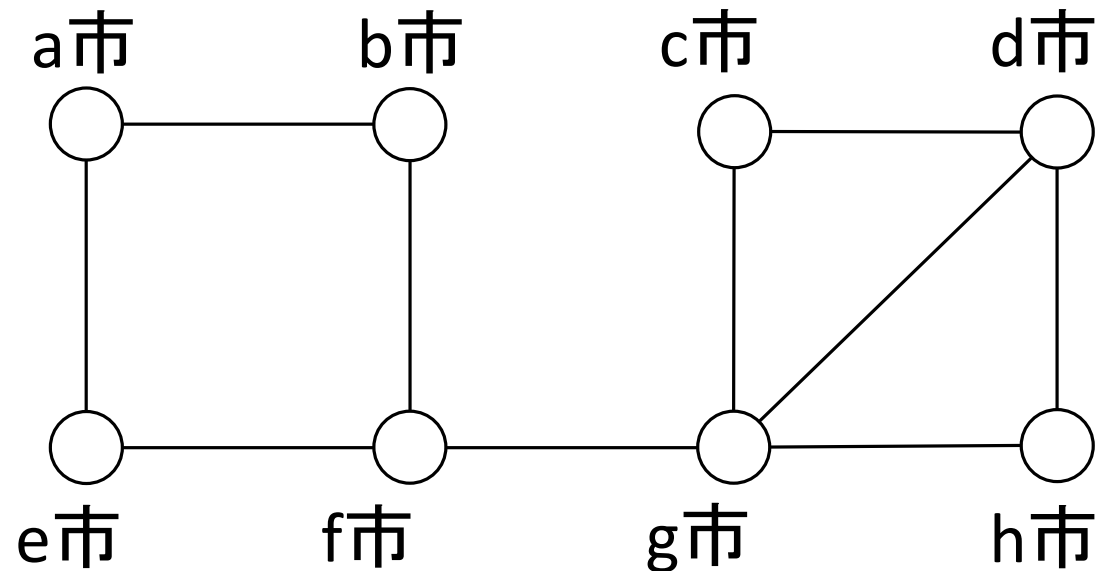
目次

- dominating setとは
- broadcast dominationとは
- 直径、半径とは
- radialとは
- 先行研究、研究動機
- split-setとは
- 結果
- 木のradial性判定アルゴリズム
- 実装と実験
- まとめ
- 今後の研究課題

dominating setとは

いくつかの市に電波塔を設置したい。

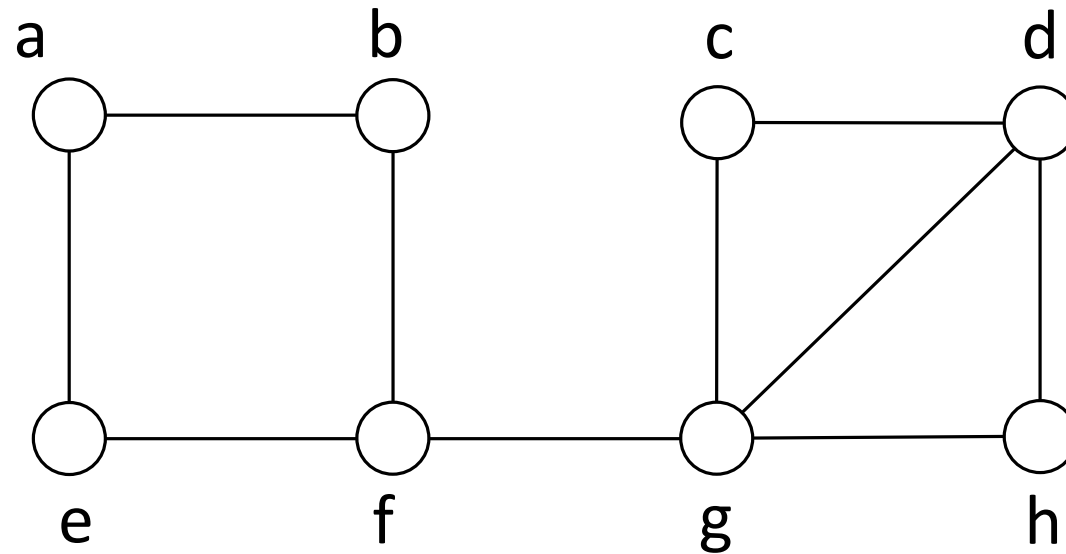
ただし、
電波塔がない市の隣には必ず電波塔があるようにする。
電波塔は少なくなるようにする。



dominating setとは

例 {a, d}

bはaの隣接点である。
(b, eはaに支配されている。)
正しい電波塔の配置ではない。
c, g, hはdに支配されている。



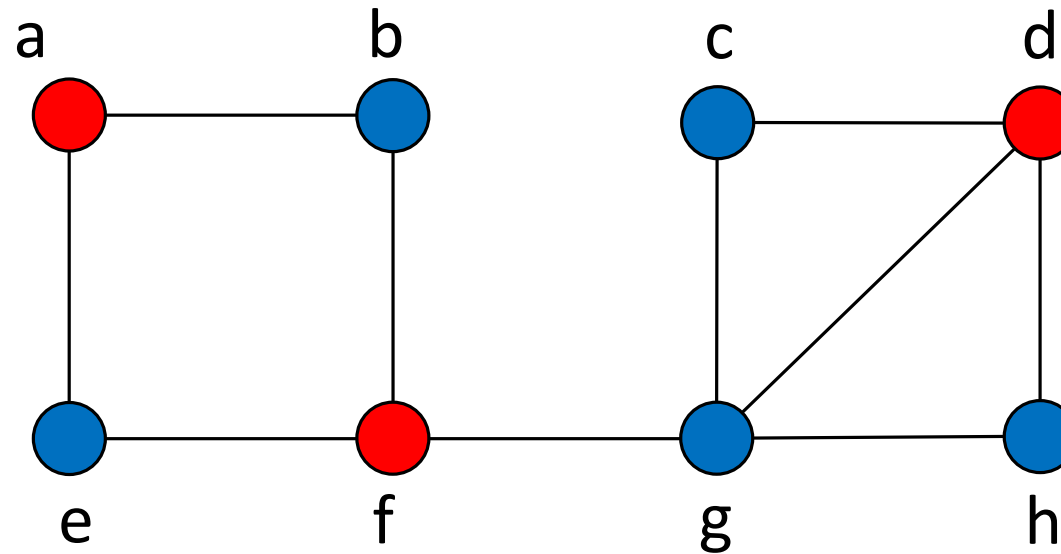
dominating setとは

例 {a, d, f}

b, eはa(とf)に支配されている。

c, hはdに支配されている。

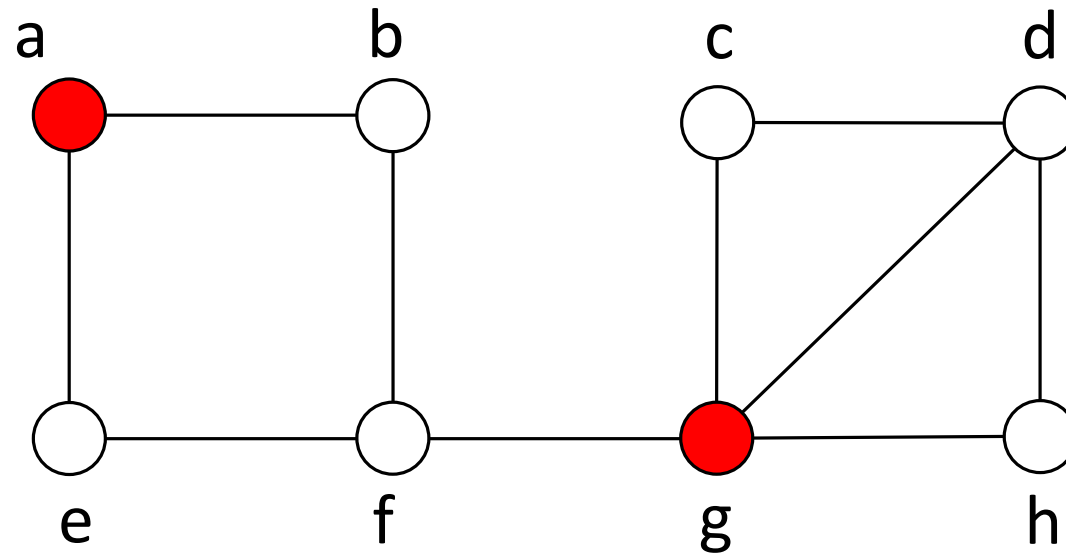
gはd(とf)に支配されている。



dominating setとは

例 {a, g}

b, c, d, e, f, hは
aとgで支配されている。

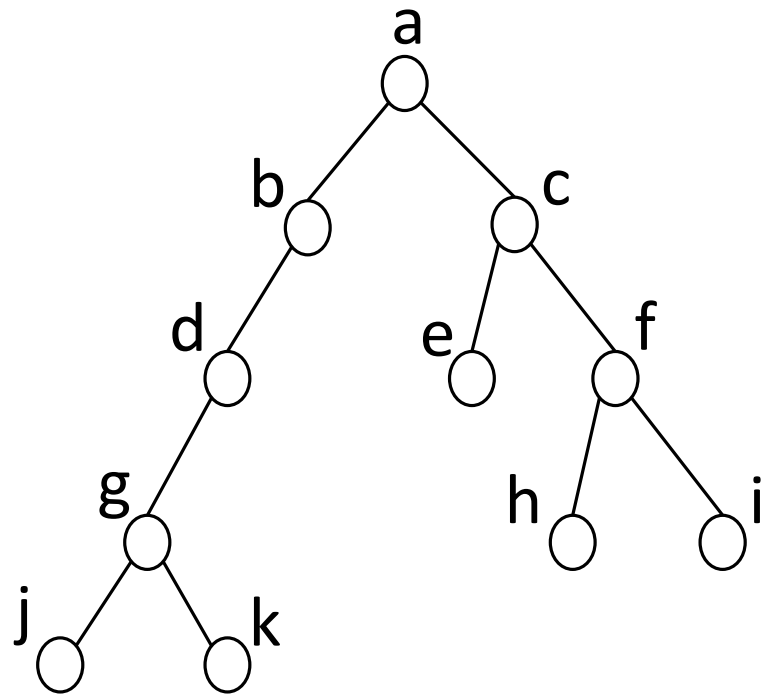


dominating setとは

グラフGのいくつかの頂点の集合Sをとり、
「Sに属していない頂点の近傍にはSの頂点が存在する」
という条件を満たすSを
支配集合 (dominating set) と呼び、
最小の支配集合の頂点数を
Gの支配数 (domination number) と呼ぶ。

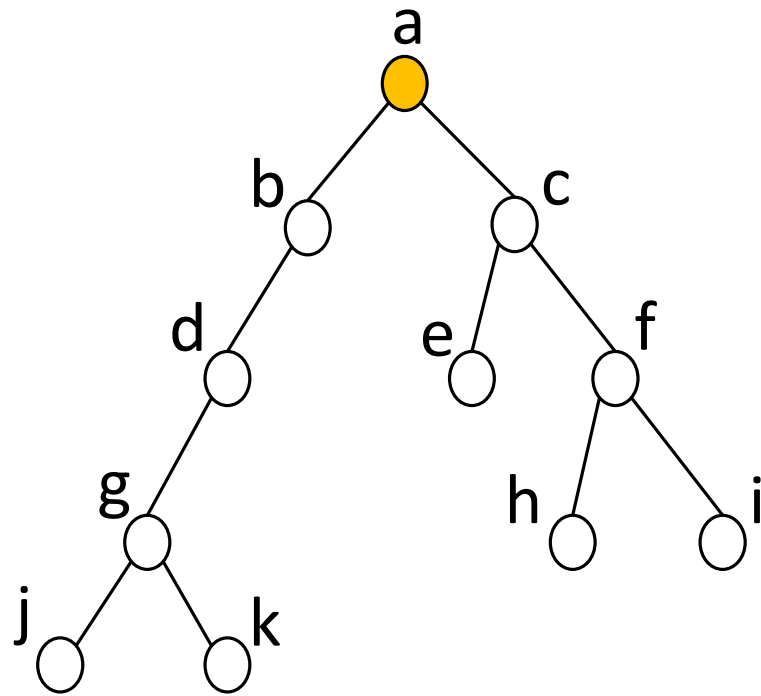
broadcast dominationとは

例



broadcast dominationとは

例 {a}



aとの距離

1の点: b, c

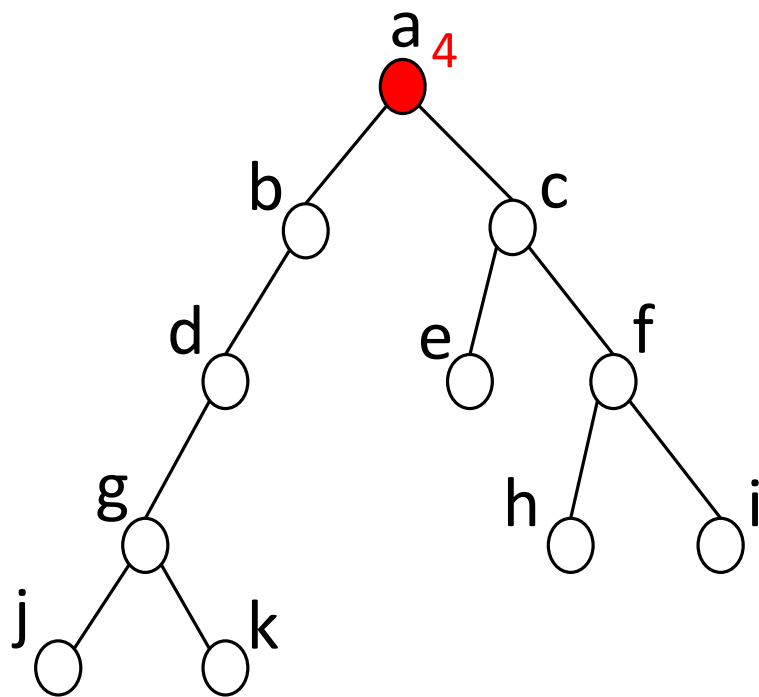
2の点: d, e, f

3の点: g, h, i

4の点: j, k

broadcast dominationとは

例 {a}



aとの距離

1の点: b, c

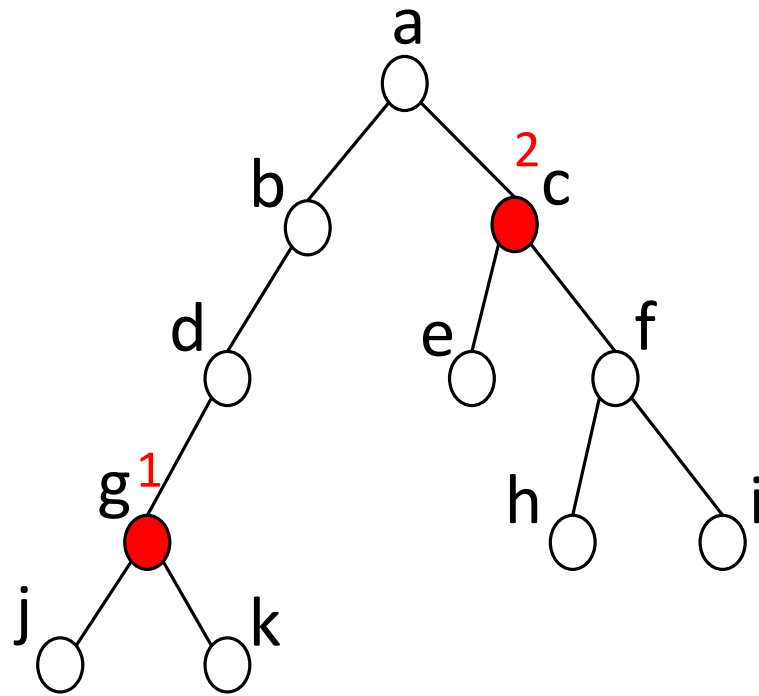
※これは正しい配置ではない。

3の点: g, h, i

4の点: j, k

broadcast dominationとは

例 {c, g}



a, b, d, e, f, h, i, j, kは
cとgで支配されている。

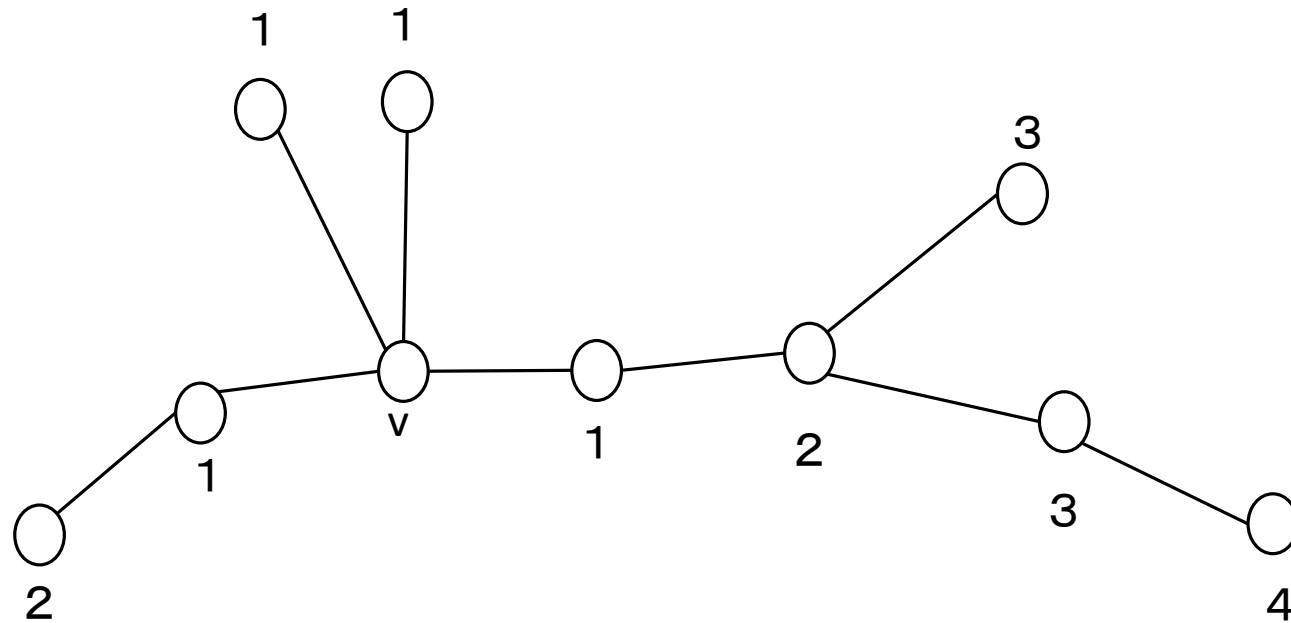
$$1 + 2 = 3 (< 4)$$

broadcast dominationとは

グラフ G のいくつかの頂点の集合 S をとり、
 S の各頂点 x に正の整数 $f(x)$ を割り振る。このとき、
「 G の各頂点 v について、 S のどれかの頂点 x との距離 $\leq f(x)$ 」
という条件を満たす S を
broadcast dominating set と呼ぶ。
 $f(x)$ の和の最小値を
 G の **broadcast domination number** と呼び、 $\gamma_b(G)$ で表す。

直径、半径とは

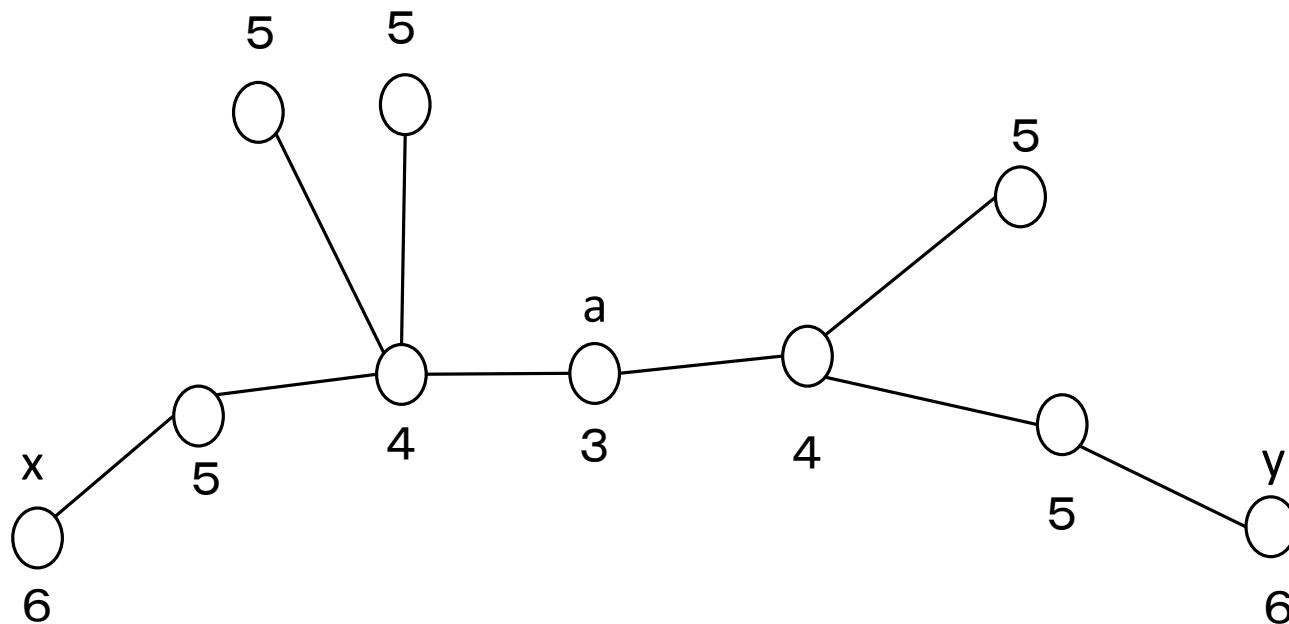
例. G



任意の点 v から最も遠い点までの距離を
離心値といい、 $e(v)$ で表す。

直径、半径とは

例. G



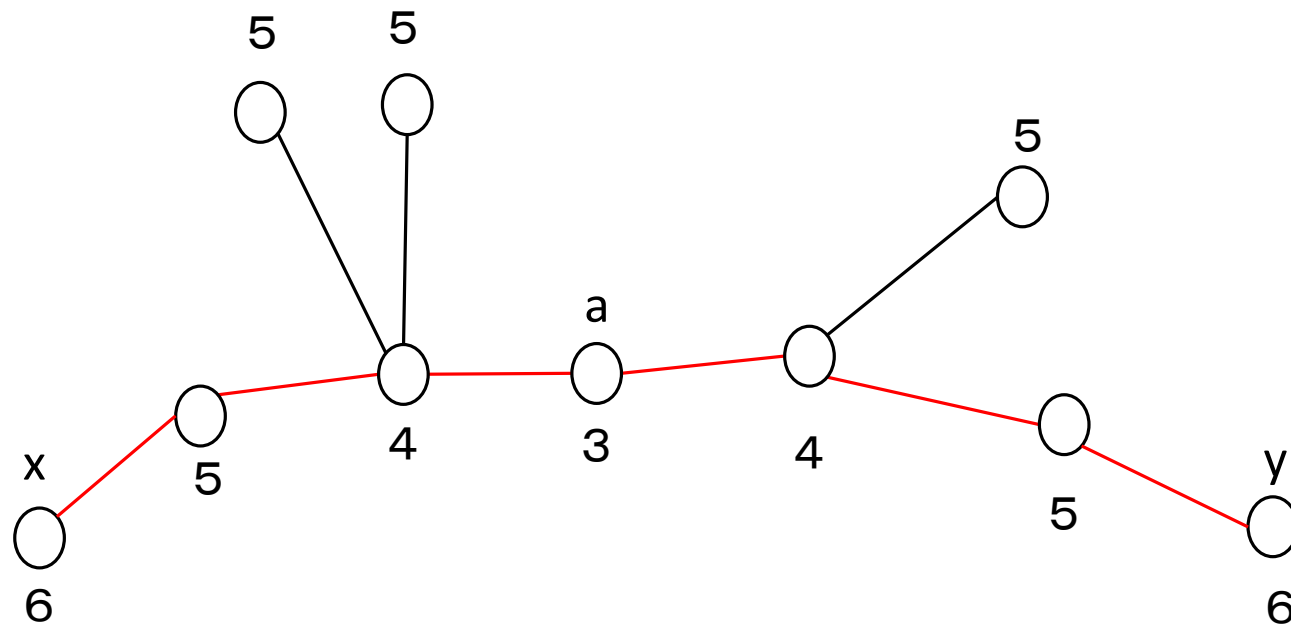
任意の点 v から最も遠い点までの距離を
離心値といい、 $e(v)$ で表す。

離心値が最小となる点をグラフの**中心**と言う。
中心の離心値を**半径**と言い、 $\text{rad}(G)$ で表す。

離心値の最大値を**直径**と言い、
 $\text{diam}(G)$ で表す。

直径、半径とは

例. G



また、このときのxからyへの道を
「**diametrical path**」と言う。

直径、半径とは

任意の点 v から最も遠い点までの距離を離心値といい、 $e(v)$ で表す。

離心値が最小となる点をグラフの中心と言う。

中心の離心値を半径と言い、 $\text{rad}(G)$ で表す。

離心値の最大値を直径と言い、 $\text{diam}(G)$ で表す。

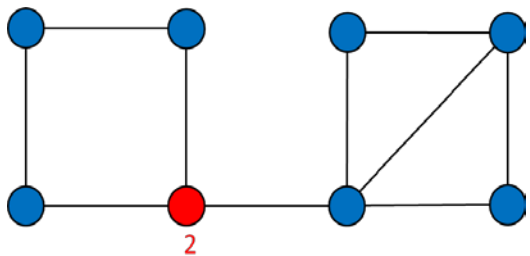
グラフ G の最も長い道を「diametrical path」と言う。

目次

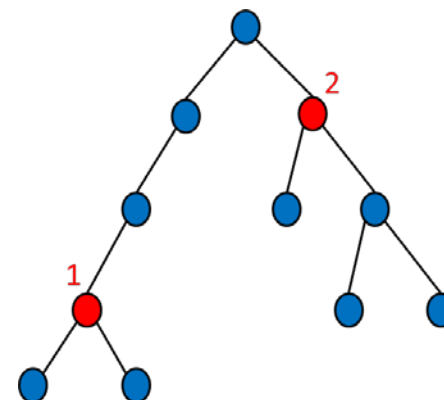
- dominating setとは
- broadcast dominationとは
- 直径、半径とは
- radialとは
- 先行研究、研究動機
- split-setとは
- 結果
- 木のradial性判定アルゴリズム
- 実装と実験
- まとめ
- 今後の研究課題

任意のグラフGについて、以下の不等式が成り立つ。

$$\gamma_b(G) \leq \text{rad}(G)$$



$$\gamma_b(G) = \text{rad}(G) = 2$$



$$\gamma_b(G) = 3, \text{rad}(G) = 4$$

radialとは

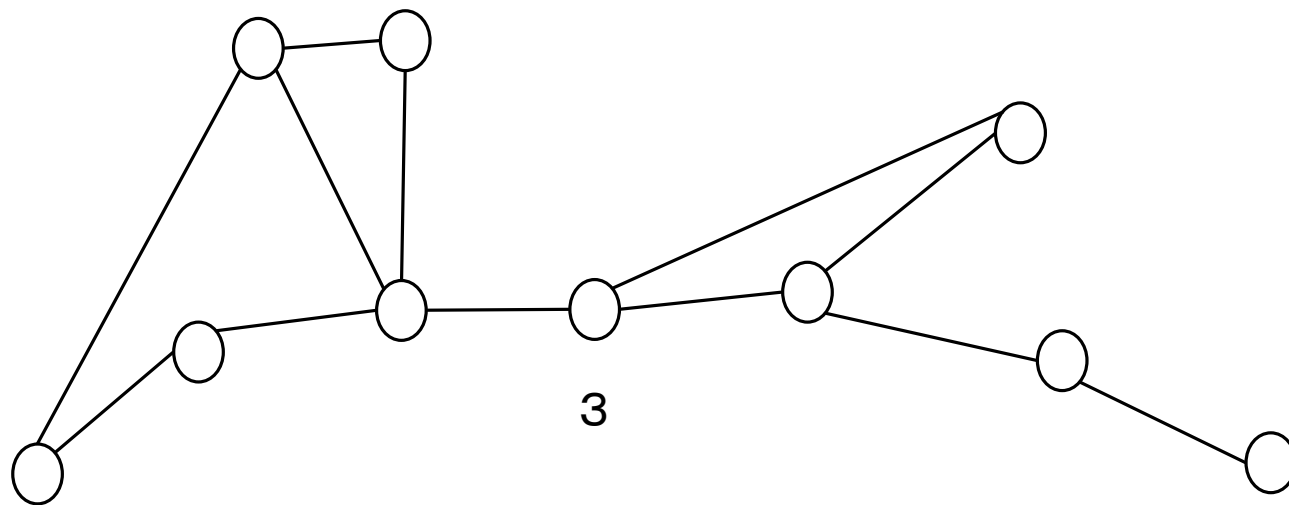
グラフGがradialであるとは、

$\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$ となっていることである。

⇔ 1点の最適なbroadcast dominating setが存在する。

radialとは

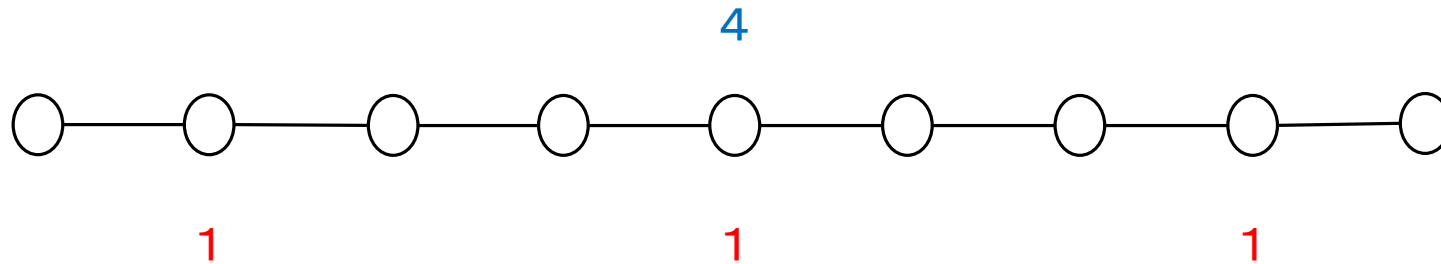
例.G



$\gamma_b(G) = \text{rad}(G) = 3$ より、
Gはradialである。

radialとは

例.G



$$\text{rad}(G) = 4$$

$$\gamma_b(G) = 3$$

$\gamma_b(G) \neq \text{rad}(G)$ より、
Gはradialではない。
(nonradialである。)

先行研究・研究動機

木 T がradialである。

⇔ T が空でないsplit-setを持たない。(S. Herke, C. M. Mynhardt 2009)

split-setとは

P: 木Tのdiametrical path

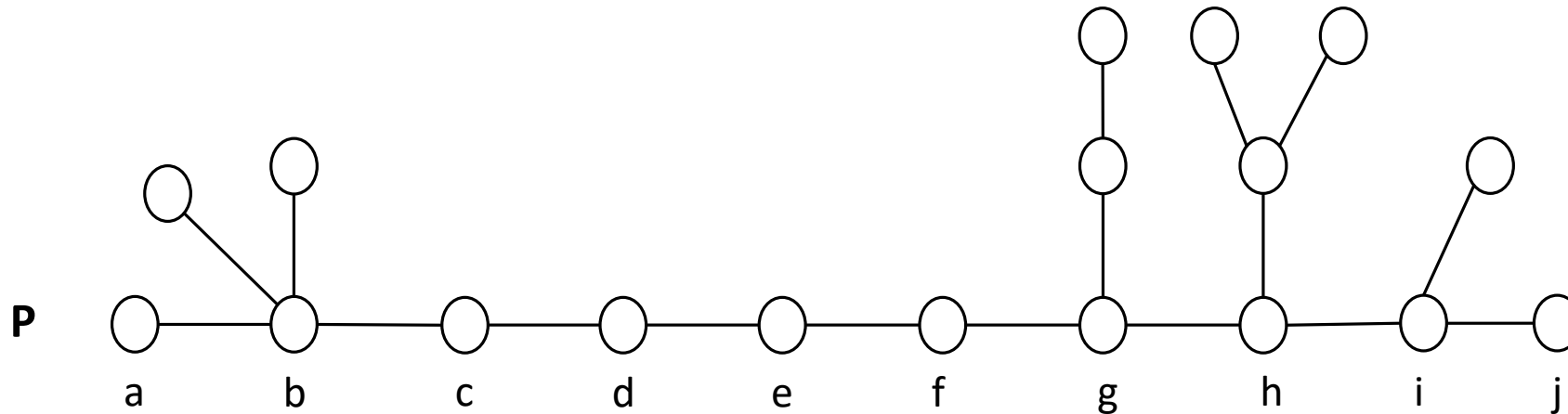
Pの辺の集合MがPに関してsplit-setであるとは以下の条件を満たすことである。

- (1) 任意の $e \in M$ について、
eの両端点のTにおける次数は2である。
- (2) T-Mの各成分 T' について、
Pかつ T' は T' のdiametrical pathであり、その長さは偶数である。

split-setとは

例.T ($\text{rad}(T) = 5$)

- (1) 任意の $e \in M$ について、
 e の両端点の T における次数は2である。
- (2) $T-M$ の各成分 T' について、
 P かつ T' は T' の diametrical path であり、
 その長さは偶数である。

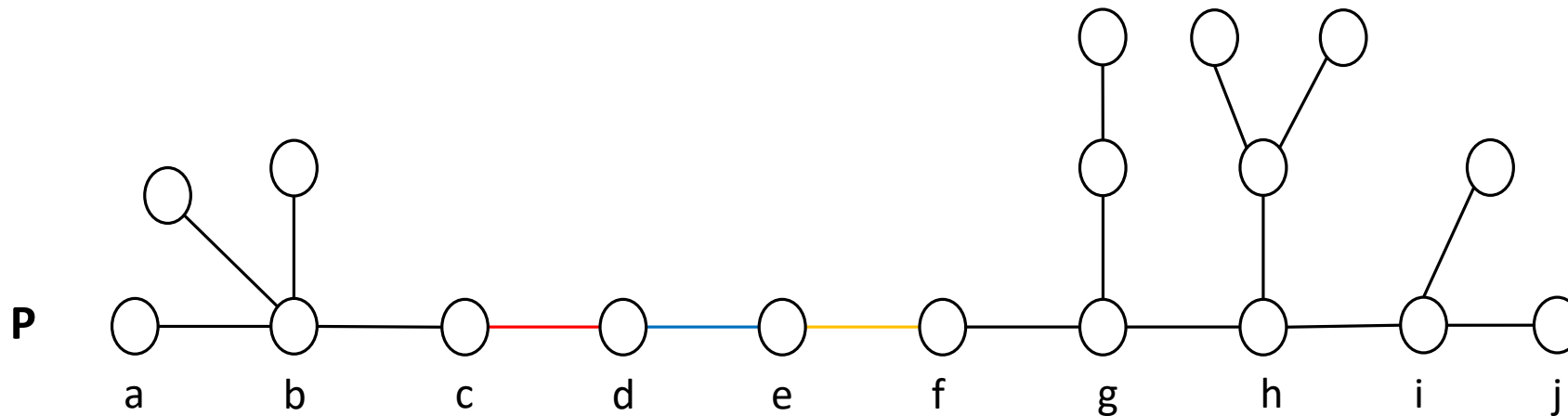


split-setとは

例.T ($\text{rad}(T) = 5$)

(1)を満たすもの: {**cd**, **de**, **ef**}

- (1) 任意の $e \in M$ について、
 e の両端点の T における次数は2である。
- (2) $T-M$ の各成分 T' について、
 P かつ T' は T' の diametrical path であり、
 その長さは偶数である。

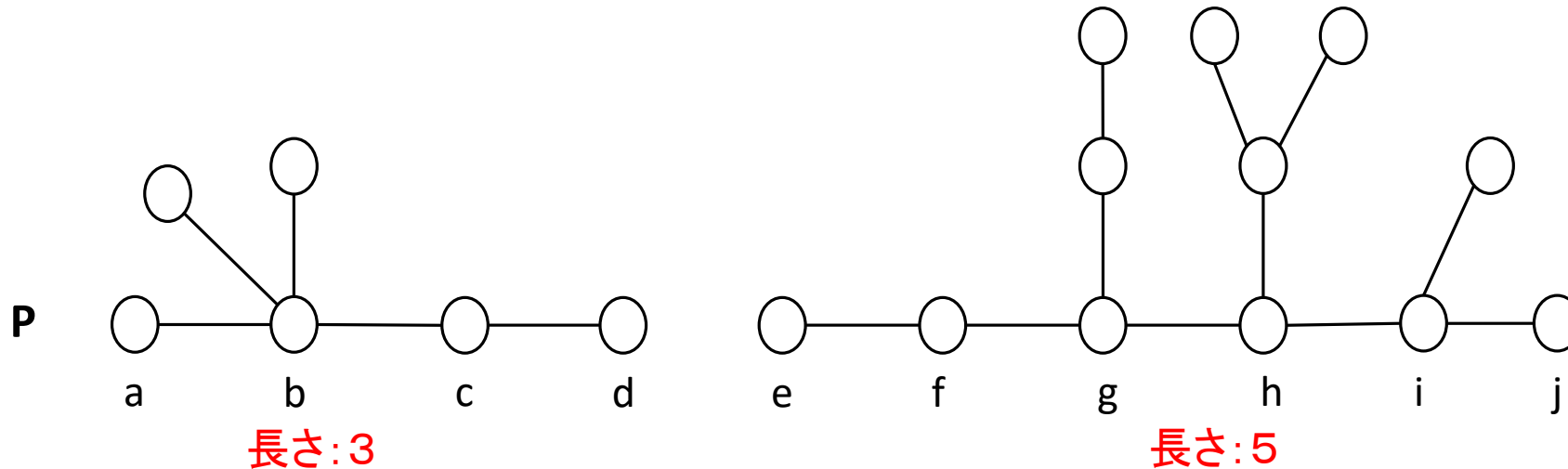


split-setとは

例.T ($\text{rad}(T) = 5$)
(de を取り除いた場合)

$\Rightarrow \{de\}$ はsplit-setでない。

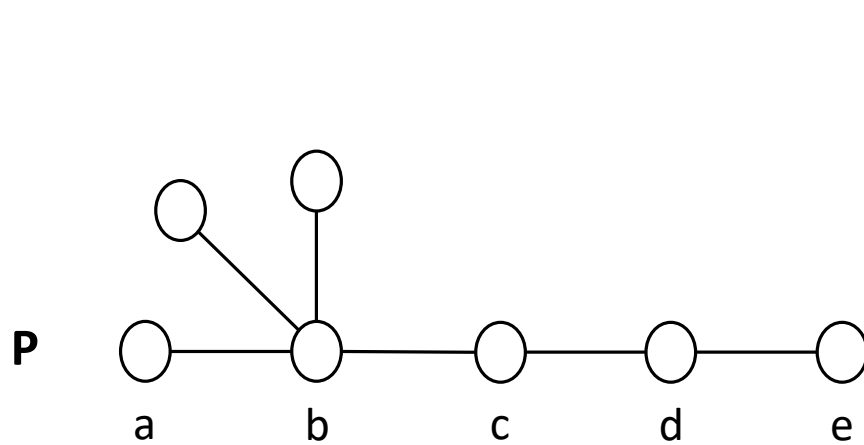
- (1) 任意の $e \in M$ について、
 e の両端点の T における次数は2である。
- (2) $T-M$ の各成分 T' について、
 P かつ T' は T' の diametrical path であり、
その長さは偶数である。



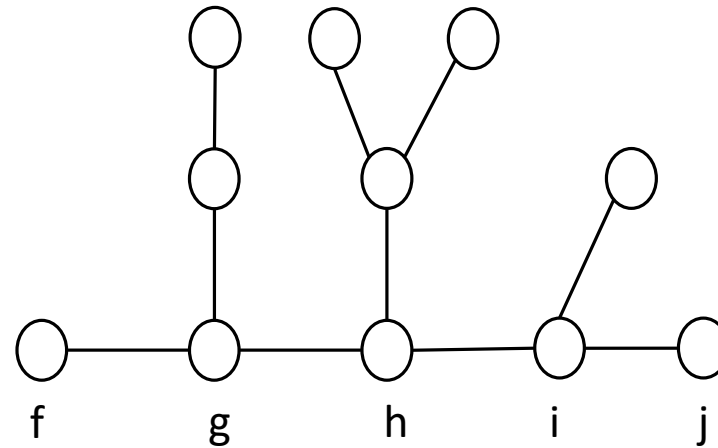
split-setとは

例.T ($\text{rad}(T) = 5$)
(ef を取り除いた場合)

$\Rightarrow \{ef\}$ はsplit-setでない。



長さ: 4



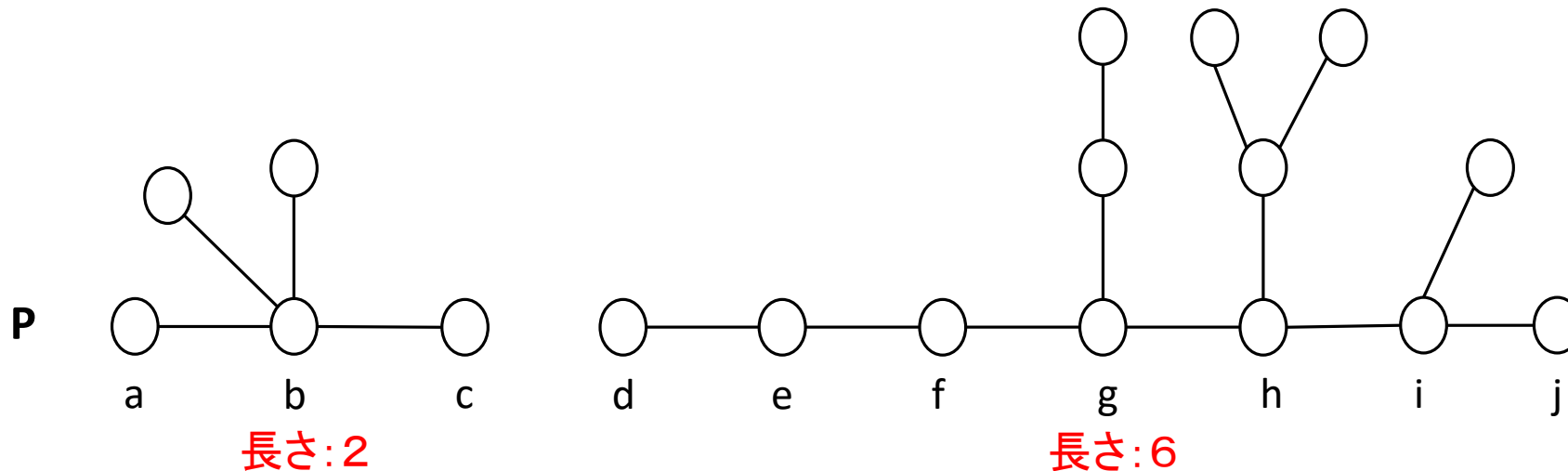
- (1) 任意の $e \in M$ について、
eの両端点のTにおける次数は2である。
- (2) T-Mの各成分T' について、
PかつT' はT' のdiametrical pathであり、
その長さは偶数である。

split-setとは

例.T ($\text{rad}(T) = 5$)
(cd を取り除いた場合)

$\Rightarrow \{cd\}$ はsplit-setである。

- (1) 任意の $e \in M$ について、
 e の両端点の T における次数は2である。
- (2) $T-M$ の各成分 T' について、
 P かつ T' は T' の diametrical path であり、
その長さは偶数である。

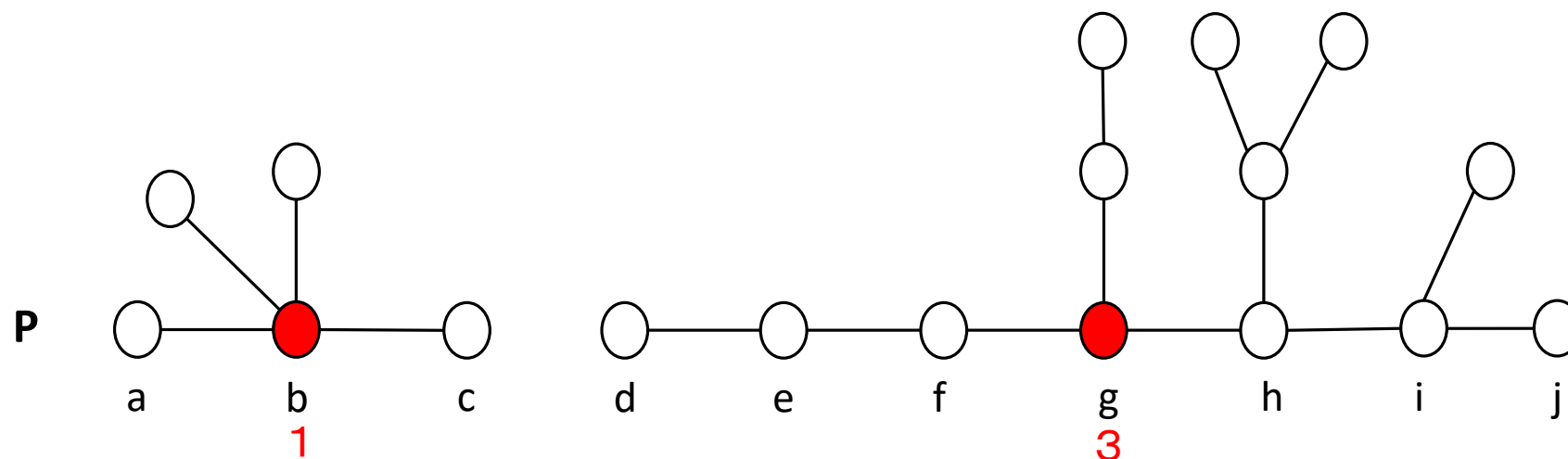


split-setとは

例.T ($\text{rad}(T) = 5$)
(cd を取り除いた場合)

$$\gamma_b(T) = 1 + 3 = 4$$

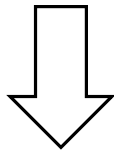
- (1) 任意の $e \in M$ について、
 e の両端点の T における次数は2である。
- (2) $T-M$ の各成分 T' について、
 P かつ T' は T' の diametrical path であり、
 その長さは偶数である。



先行研究・研究動機

木Tがradialである。

⇔Tが空でないsplit-setを持たない。(S. Herke, C. M. Mynhardt 2009)



木Tのradial性を判定するには、高々2本までの辺を調べれば良いのではないか。

結果

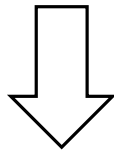
定理

木 T がsplit-setを持つならば、
高々2本の辺を含むsplit-setが存在する。

結果

定理

木 T がsplit-setを持つならば、高々2本の辺を含むsplit-setが存在する。

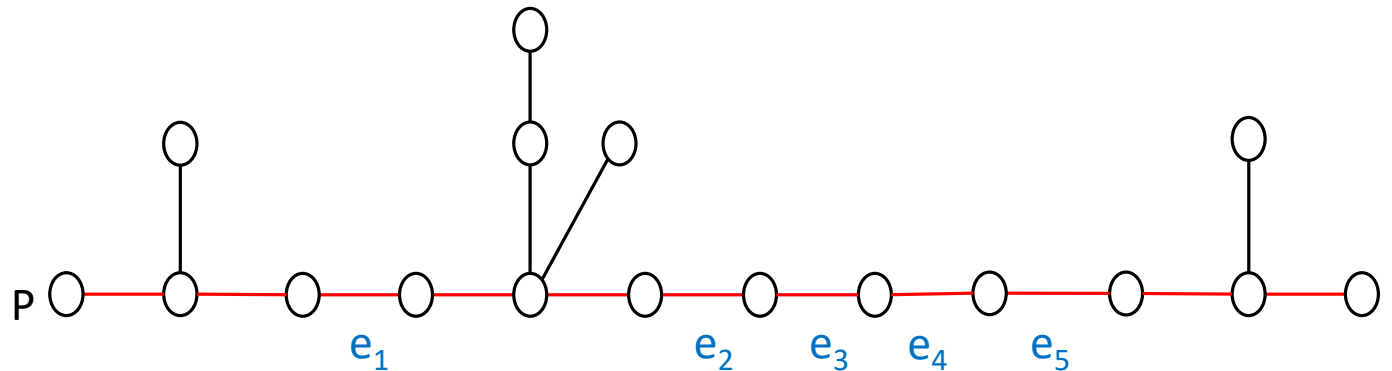


木 T がsplit-setを持つかどうか調べるには、高々2本の辺を調べれば良い。

この定理を用いて、木のradial性を判定するアルゴリズムを構築した。

木のradial性判定アルゴリズム

1. 木 T のdiametrical path (P とする)を見つける。
2. P における両端の頂点の次数が2の辺を e_i ($i = 1, 2, \dots, n \mid n \leq \text{diam}(T) - 2$)とする。
 e_i ($i = 1, 2, \dots, n$)をちょうど1本ずつ取り除き、それぞれがsplit-setか判定する。
3. split-setが存在する $\Rightarrow$ nonradialである。
split-setが存在しない $\Rightarrow$ radialである。



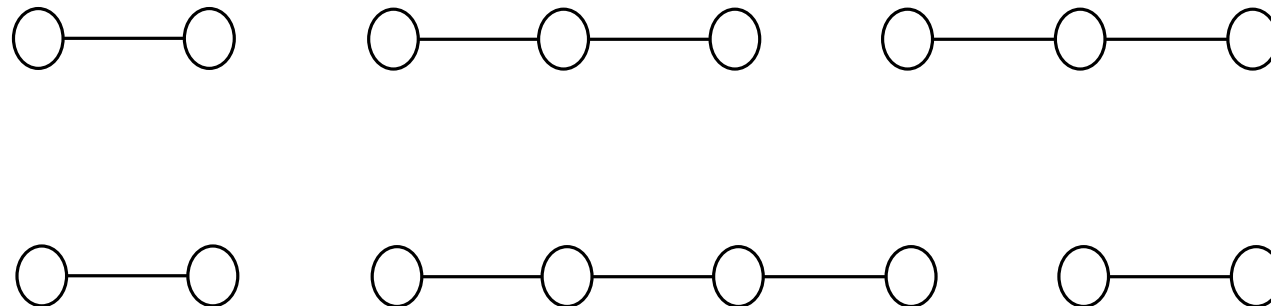
木のradial性判定アルゴリズム

(i) P の長さが奇数の場合

任意の2辺から成るsplit-set $\{e_i, e_j\}$ を取った際、残りの道の長さの組み合わせは、奇数 $\times 1$ 、偶数 $\times 2$ または奇数 $\times 3$ となるので、2辺のsplit-setは存在しない。

$\Rightarrow$ 1辺のsplit-setのみを考える。

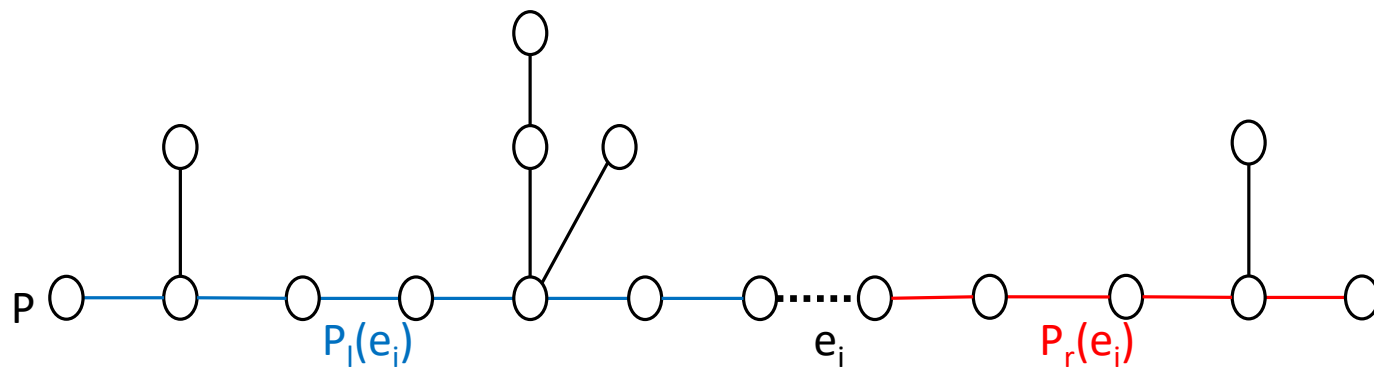
例 P の長さ: 7



木のradial性判定アルゴリズム

(i) P の長さが奇数の場合

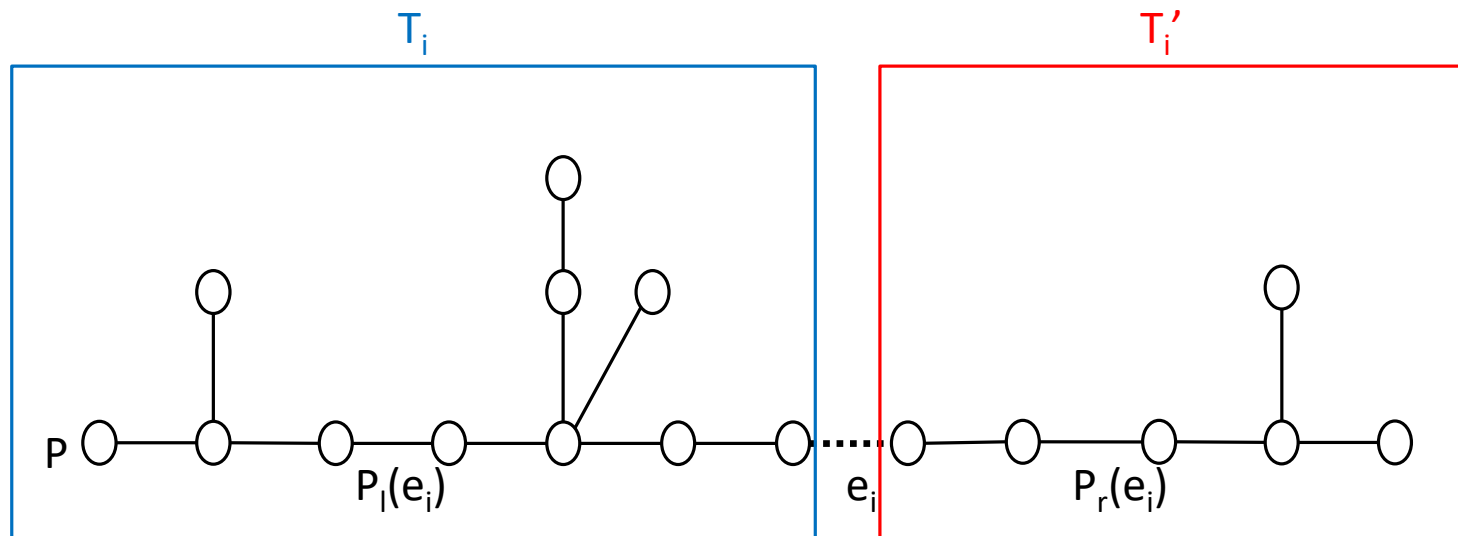
1. 各辺 $e_i \in E(P)$ について、 $P - e_i$ の左側の道を $P_l(e_i)$ 、右側の道を $P_r(e_i)$ とし、 $P_l(e_i)$ の長さが偶数か調べる。



木のradial性判定アルゴリズム

(i) P の長さが奇数の場合

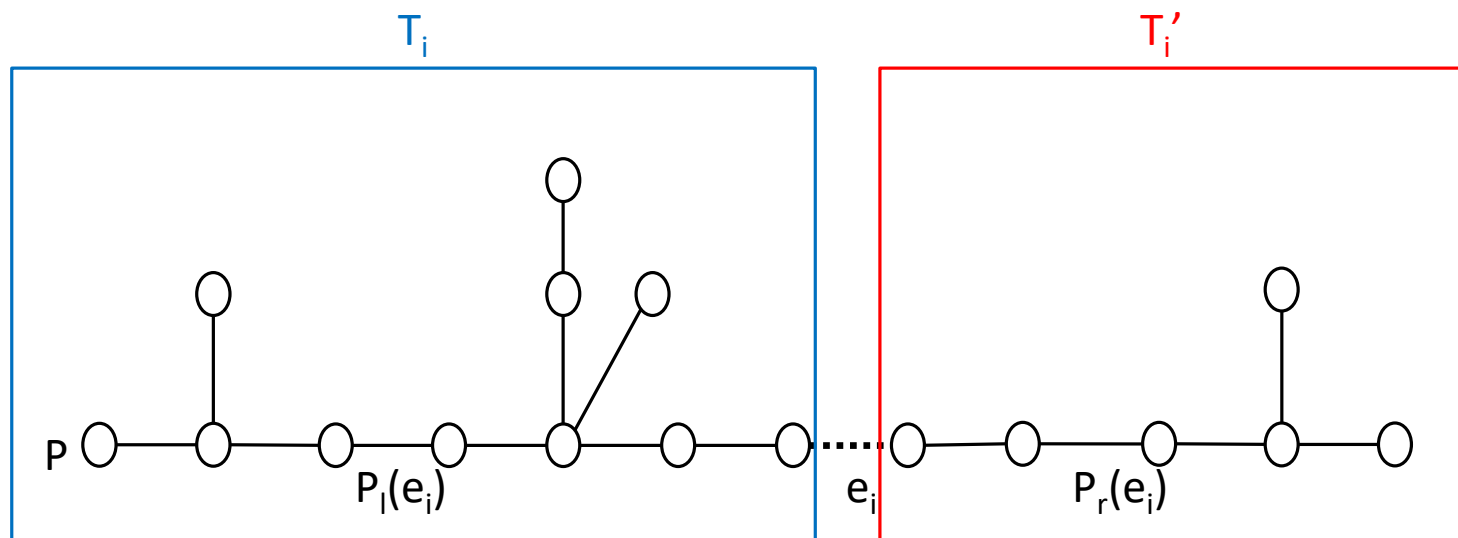
2. $P_l(e_i)$ を含む木を T_i とし、 $P_r(e_i)$ を含む木を T'_i とする。
 $P_l(e_i)$ の長さと木 T_i の直径が同じ値か調べる。



木のradial性判定アルゴリズム

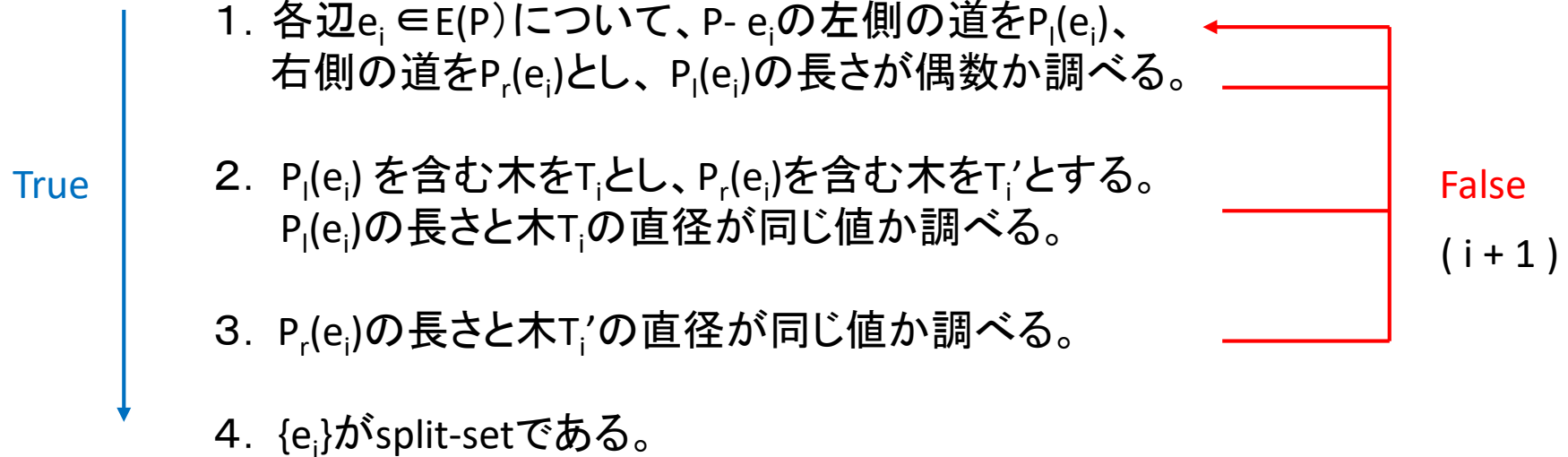
(i) P の長さが奇数の場合

3. $P_r(e_i)$ の長さと木 T'_i の直径が同じ値か調べる。



木のradial性判定アルゴリズム

(i) P の長さが奇数の場合



4にたどり着く(T はnonradialである)、または i が n 以上になる(T はradialである)まで続ける。

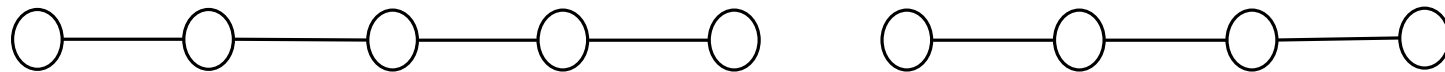
木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

任意の1辺から成るsplit-set $\{e_i\}$ を取った際、残りの道の長さは、どちらかが奇数になるので、1辺のsplit-setは存在しない。

⇒2辺のsplit-setのみを考える。

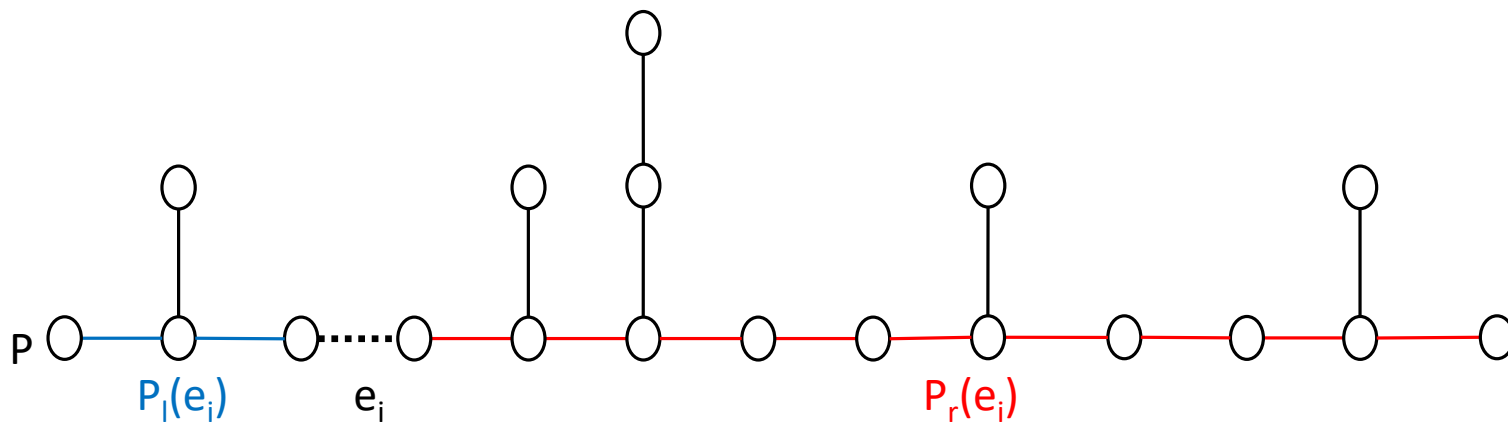
例 P の長さ: 8



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

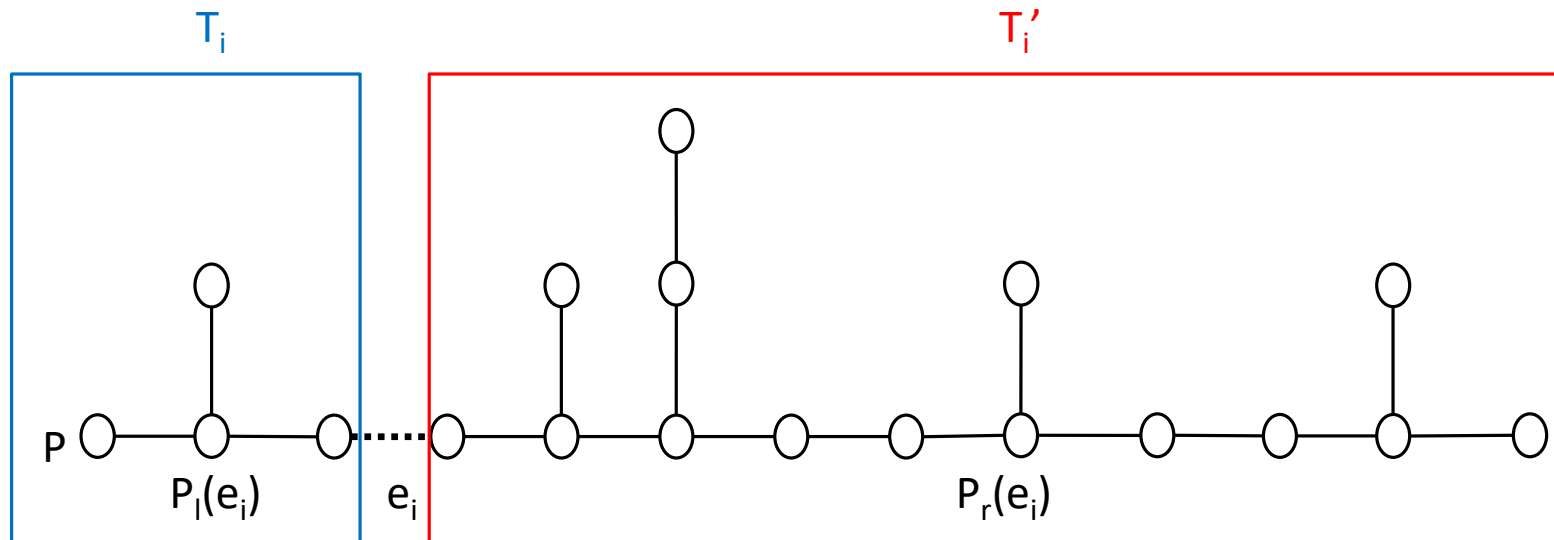
1. 各辺 $e_i \in E(P)$ について、 $P - e_i$ の左側の道を $P_l(e_i)$ 、右側の道を $P_r(e_i)$ とし、 $P_l(e_i)$ の長さが偶数か調べる。
(i は1から n まで昇順に調べる。)



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

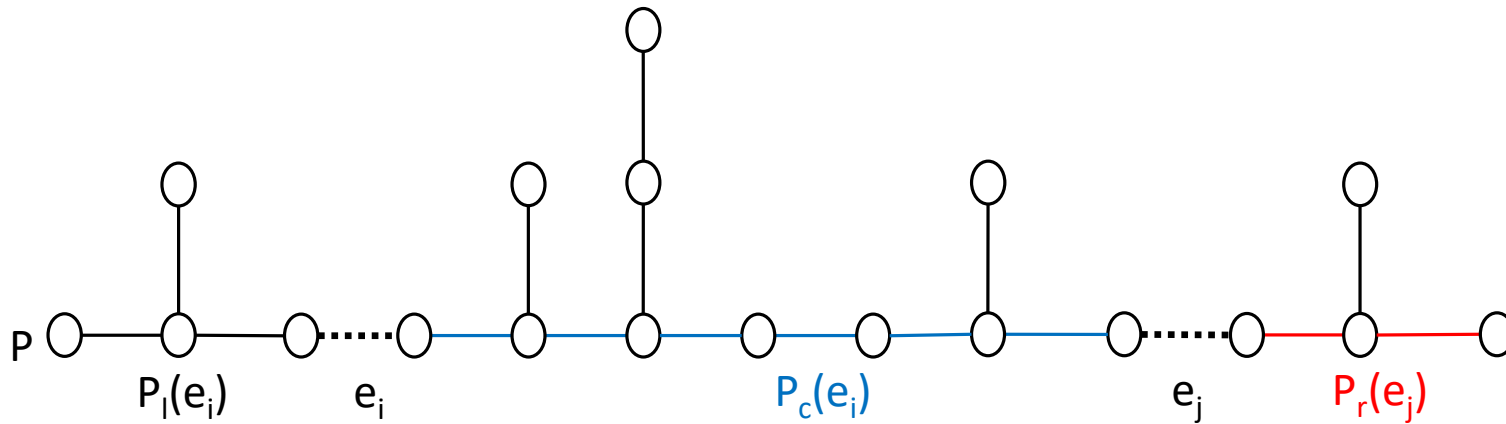
2. $P_l(e_i)$ を含む木を T_i とし、 $P_r(e_i)$ を含む木を T'_i とする。
 $P_l(e_i)$ の長さと木 T_i の直径が同じ値か調べる。



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

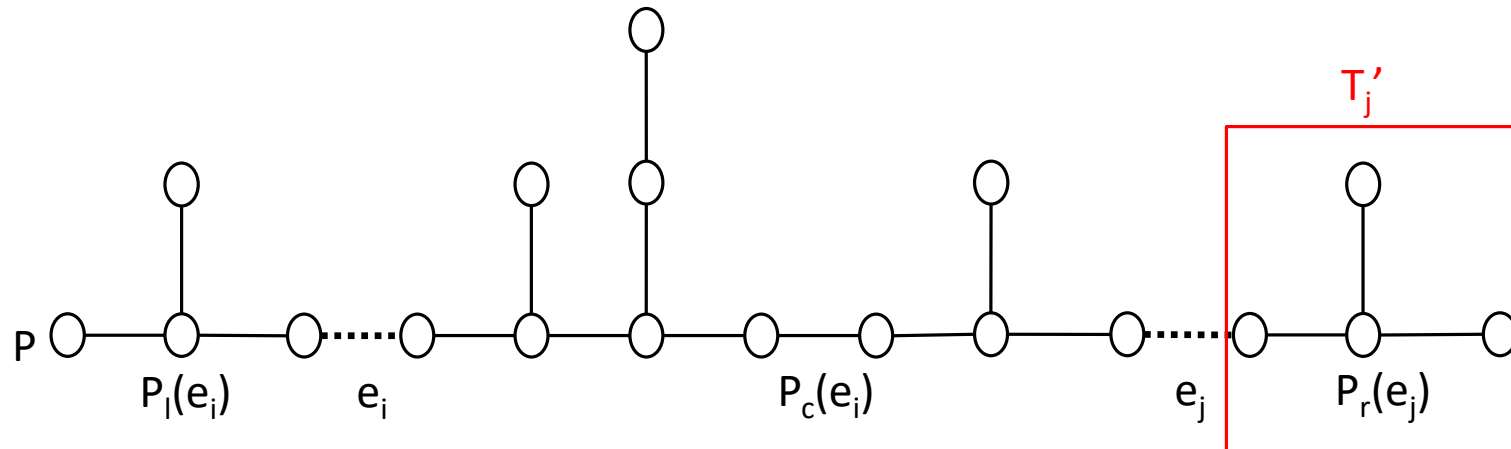
3. 各辺 $e_j \in E(P)$ について、 $P - e_j$ の左側の道を $P_l(e_j)$ 、右側の道を $P_r(e_j)$ とし、 $P_r(e_j)$ の長さが偶数か調べる。
(j は i の最大値から i より大きい数を降順に調べる。)
 $P_l(e_i)$ かつ $P_r(e_i)$ なる道を $P_c(e_i)$ とする。



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

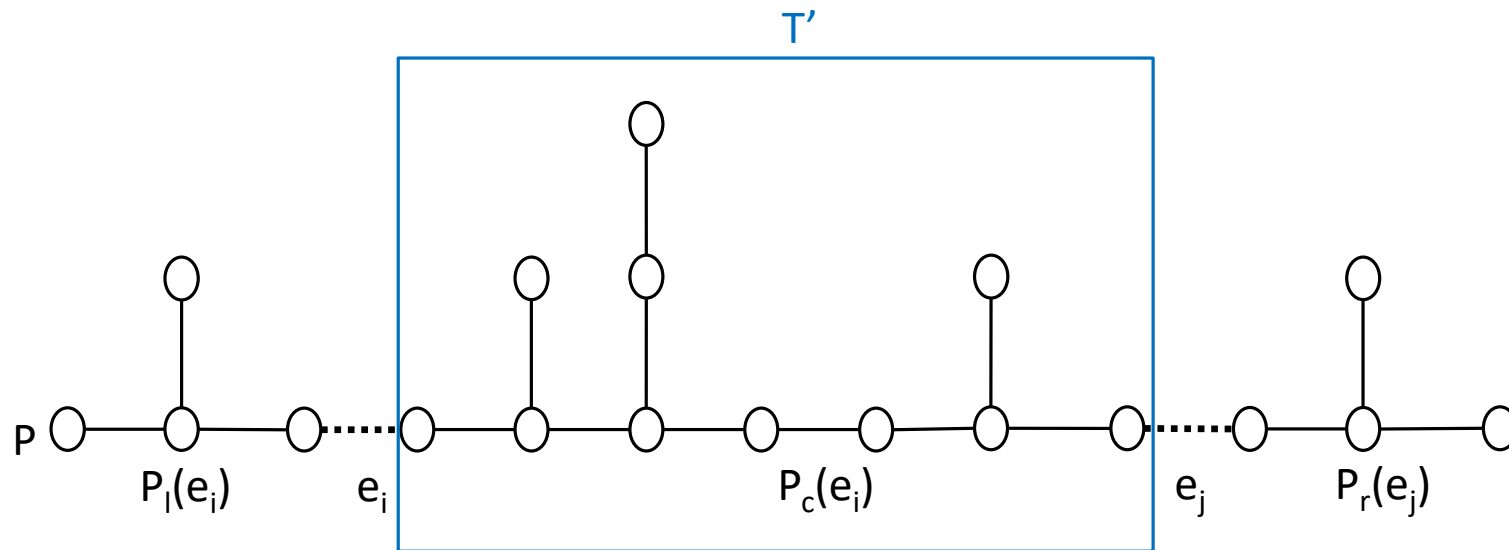
4. $P_r(e_j)$ を含む木を T'_j とする。
 $P_r(e_j)$ の長さと同木 T'_j の直径が同じ値か調べる。



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

5. $P_c(e_i)$ を含む木を T' とする。
 $P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値か調べる。



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

True

1. $P_l(e_i)$ の長さが偶数か調べる。
(i は1から n まで昇順に調べる。)

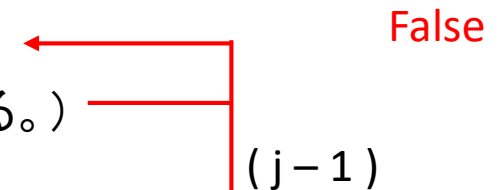
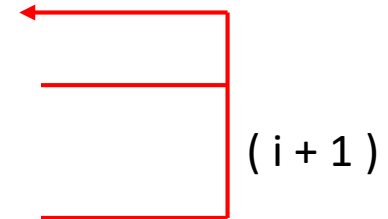
2. $P_l(e_i)$ の長さと木 T_i の直径が同じ値か調べる。

3. $P_r(e_j)$ の長さが偶数か調べる。
(j は i の最大値から i より大きい数を降順に調べる。)

4. $P_r(e_j)$ の長さと木 T_j' の直径が同じ値か調べる。

5. $P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値か調べる。

6. $\{e_i, e_j\}$ がsplit-setである。



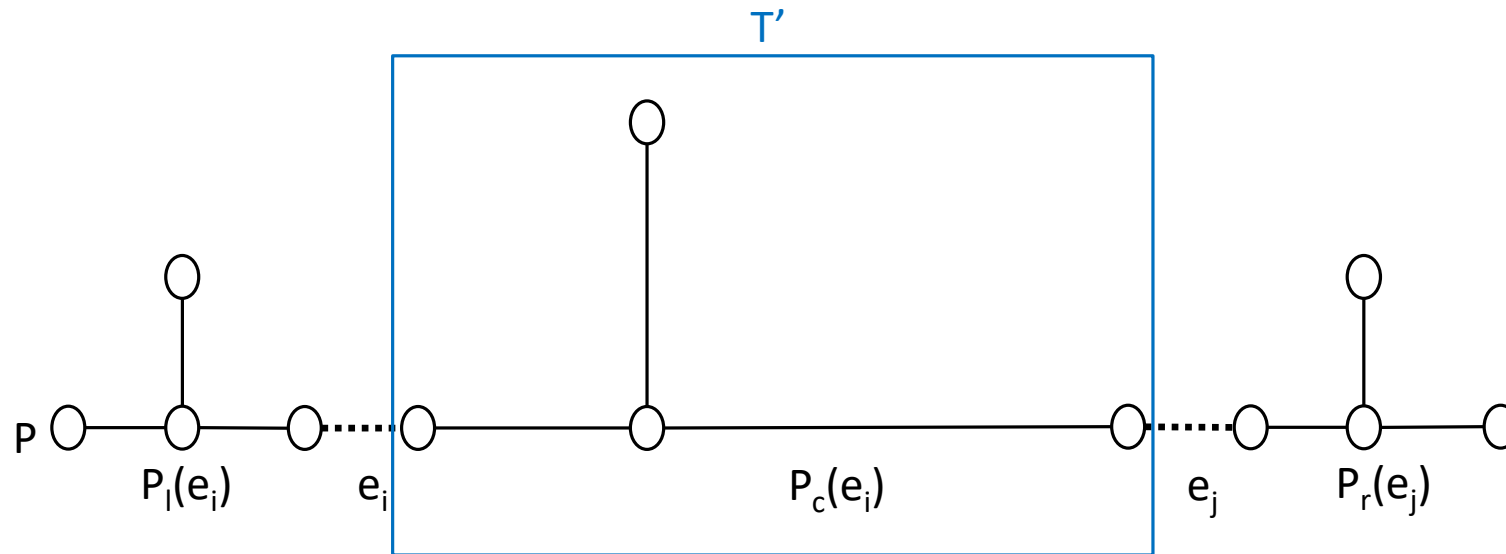
False

木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

$P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値でない $\Rightarrow P_c(e_i)$ は T' のdiametrical pathでない。

- ① T' のdiametrical pathの端点が $P_c(e_i)$ 上に存在するとき
- ② T' のdiametrical pathの端点が $P_c(e_i)$ 上に存在しないとき

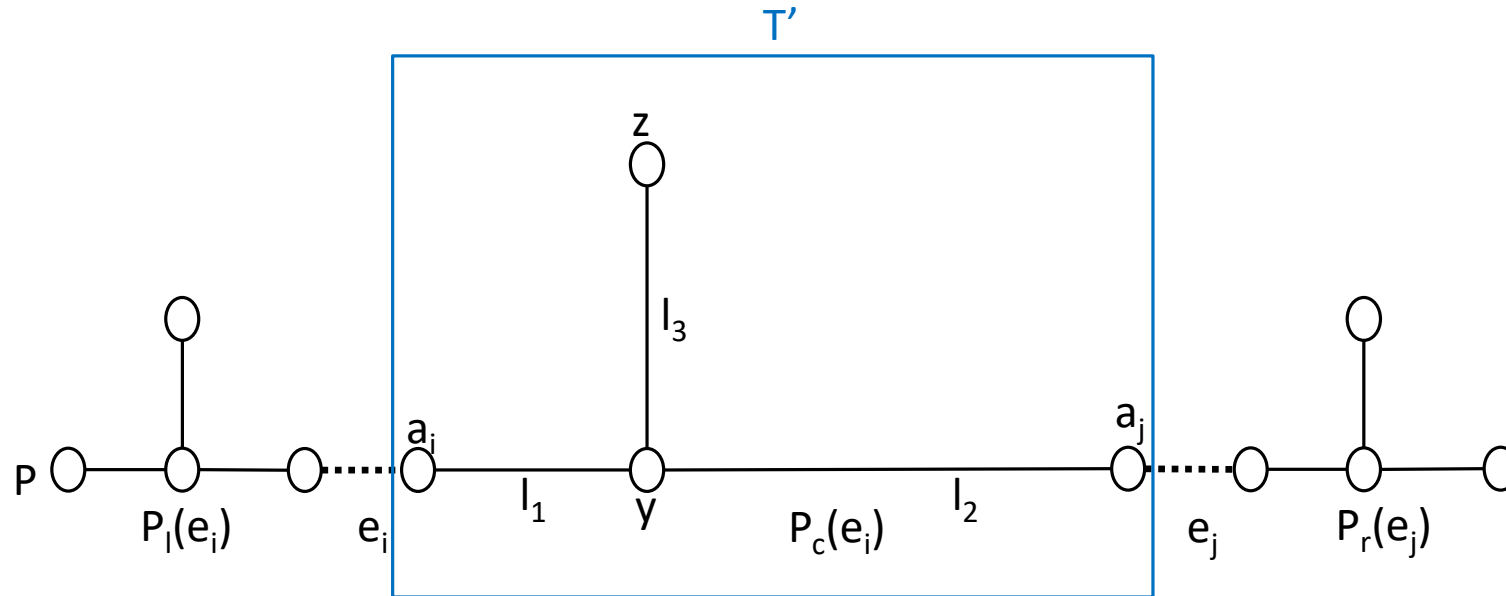


木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

$P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値でない $\Rightarrow P_c(e_i)$ は T' のdiametrical pathでない。

① T' のdiametrical pathの端点が $P_c(e_i)$ 上に存在するとき



木のradial性判定アルゴリズム

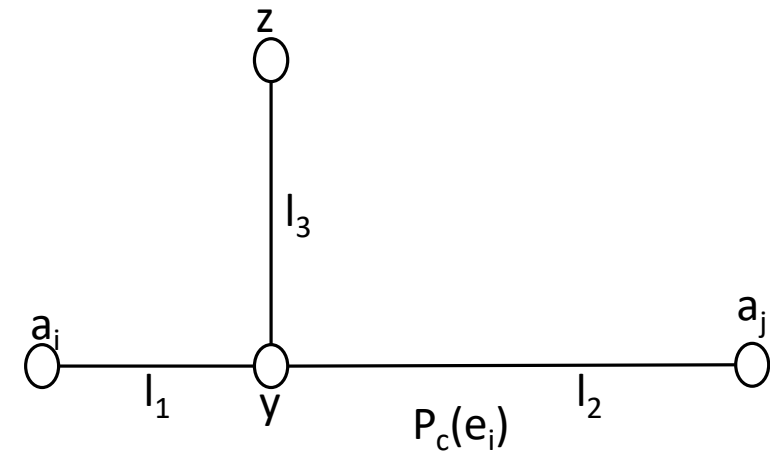
(ii) P の長さが偶数の場合

$P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値でない $\Rightarrow P_c(e_i)$ は T' のdiametrical pathでない。

① T' のdiametrical pathの端点が $P_c(e_i)$ 上に存在するとき

l_1, l_2, l_3 の組み合わせ

- $l_1 > l_3$ かつ $l_2 > l_3$
- $l_1 > l_3$ かつ $l_2 > l_3$
- $l_1 > l_3$ かつ $l_2 < l_3$
- $l_1 < l_3$ かつ $l_2 > l_3$
- $l_1 < l_3$ かつ $l_2 = l_3$
- $l_1 < l_3$ かつ $l_2 < l_3$
- $l_1 = l_3$ かつ $l_2 > l_3$
- $l_1 = l_3$ かつ $l_2 > l_3$
- $l_1 = l_3$ かつ $l_2 < l_3$



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

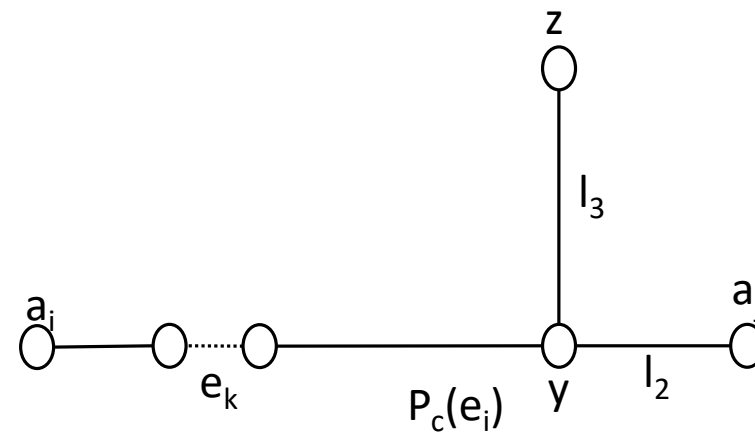
$P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値でない $\Rightarrow P_c(e_i)$ は T' のdiametrical pathでない。

① T' のdiametrical pathの端点が $P_c(e_i)$ 上に存在するとき

・ $l_1 > l_3$ かつ $l_2 < l_3$

$\Rightarrow y$ から l_3 以上離れている e_i 寄りの辺 e_k を調べる。

($j = k$ とし、3の処理へ戻る。)



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

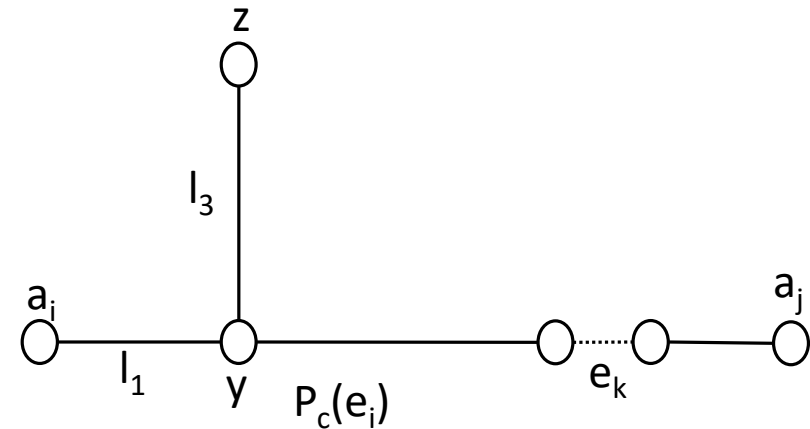
$P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値でない $\Rightarrow P_c(e_i)$ は T' のdiametrical pathでない。

① T' のdiametrical pathの端点が $P_c(e_i)$ 上に存在するとき

・ $l_1 < l_3$ かつ $l_2 > l_3$

$\Rightarrow y$ から l_3 以上離れている e_j 寄りの辺 e_k を調べる。

($i = k$ とし、1の処理へ戻る。)



木のradial性判定アルゴリズム

(ii) P の長さが偶数の場合

$P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値でない

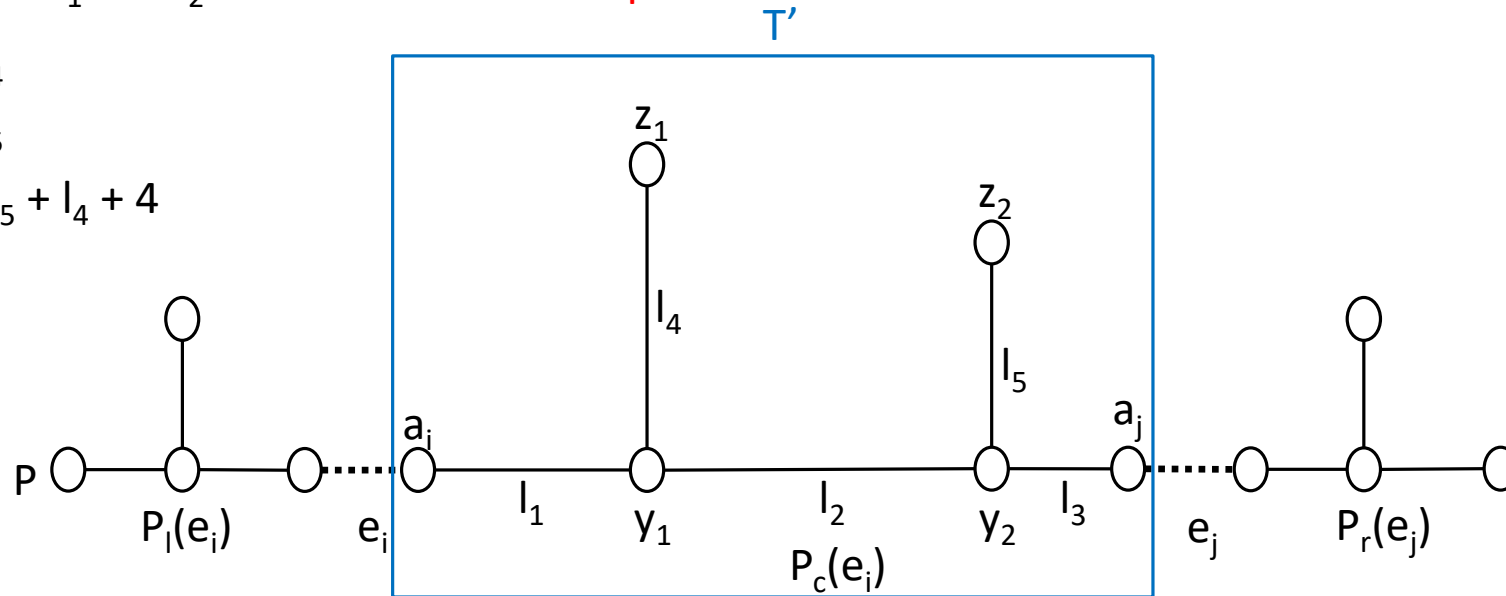
② T' のdiametrical pathの端点が $P_c(e_i)$ 上に存在しないとき

$\Rightarrow z_1$ から z_2 への道がdiametrical path

- $l_1 = l_4$

- $l_3 = l_5$

- $l_2 \geq l_5 + l_4 + 4$



木のradial性判定アルゴリズム

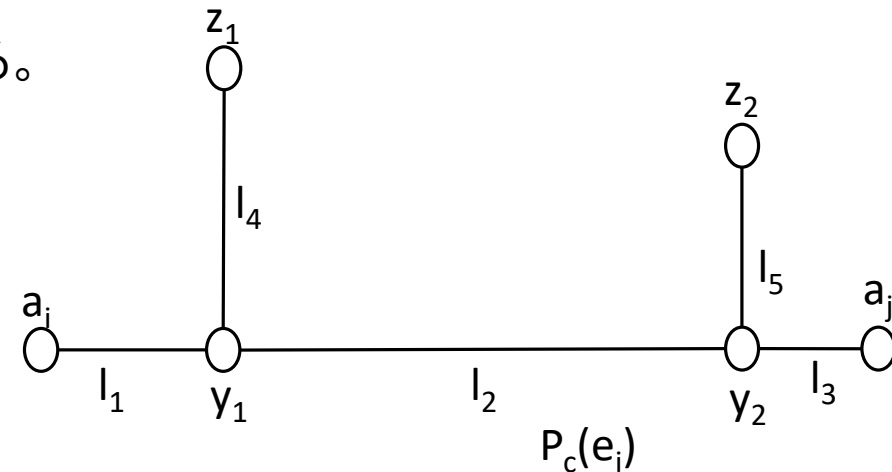
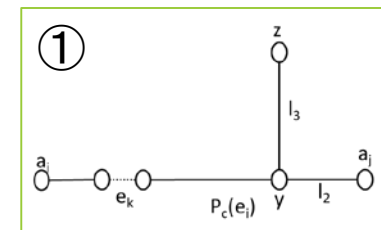
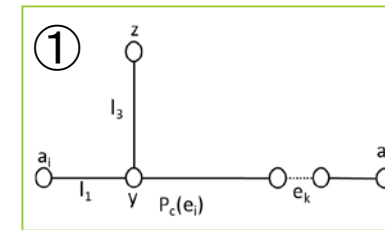
(ii) P の長さが偶数の場合

$P_c(e_i)$ の長さと木 T' の直径が同じ値でない

② T' のdiametrical pathの端点が $P_c(e_i)$ 上に存在しないとき
 $\Rightarrow z_1$ から z_2 への道がdiametrical path

・ $l_2 \geq l_5 + l_4 + 4$ のとき

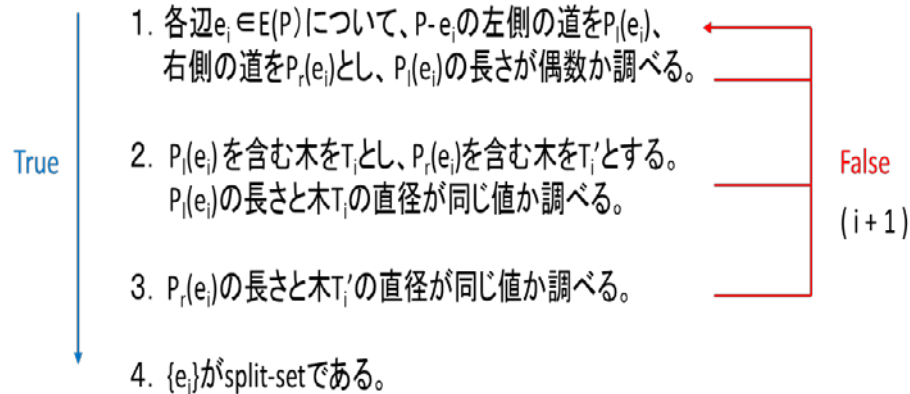
$\Rightarrow y_1$ から l_4 以上離れている e_j 寄りの辺 e_k 、
 y_2 から l_5 以上離れている e_i 寄りの辺 e_h を調べる。
($i = k$ 、 $j = h$ とし、1の処理へ戻る。)



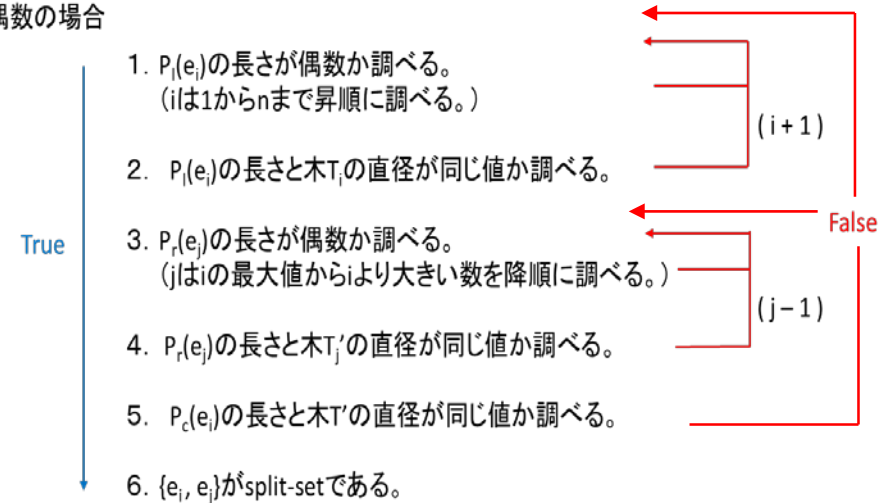
木のradial性判定アルゴリズム

- 木 T のdiametrical path(P とする)を見つける。
⇒ P の長さの偶奇を調べる。

(i) P の長さが奇数の場合



(ii) P の長さが偶数の場合



- split-set が存在する ⇒ nonradial である。
split-set が存在しない ⇒ radial である。

実装と実験

Q1.位数とnonradial treeの出現確率にはどのような関係があるのか？

Q2.diametrical pathの長さに比例してnonradial treeの出現確率は増えるのでは？

Q3.diametrical path 上に存在し、両方の頂点の次数が2の辺の出現確率に比例してnonradial treeの出現確率は増えるのでは？

実装と実験

Q1.位数とnonradial treeの出現確率にはどのような関係があるのか？

⇒実験方法

位数を10～100まで10ずつ増やしていく。

各位数について木をランダムに100回生成し、nonradial treeの出現確率を求める。

⇒結果

位数が極端に小さい場合以外では、
nonradial treeの出現確率は位数に依存しない。

位数	nonradial tree
10	8%
20	0%
30	2%
40	0%
50	1%
60	1%
70	0%
80	0%
90	0%
100	1%

実装と実験

Q1.位数とnonradial treeの出現確率にはどのような関係があるのか？

⇒極端に位数が小さい場合以外ではnonradial treeの出現確率は位数に依存しない。

Q2.diametrical pathの長さに比例してnonradial treeの出現確率は増えるのでは？

⇒diametrical pathの最低数が小さい範囲では増加関係だが、ある程度大きくなると、両者の間には関係はなくなる。

Q3.diametrical path 上に存在し、両方の頂点の次数が2の辺の出現確率に比例してnonradial treeの出現確率は増えるのでは？

⇒両者に関係はない。

まとめ

- ・木Tのradial性判定は、直径が奇数の場合は1辺から成るsplit-setを、直径が偶数の場合は2辺から成るsplit-setを探索することで実現可能である。
- ・nonradial treeの出現確率との関係
 - ┌ 位数 $\Rightarrow$ 極端に小さい場合以外では関係しない。
 - └ diametrical pathの最低数 $\Rightarrow$ 小さい範囲では増加関係だが、ある程度大きくなると両者の間には関係はなくなる。
 - └ diametrical path 上に存在し、両方の頂点の次数が2の辺の出現確率 $\Rightarrow$ 関係はない。

今後の研究課題

- このアルゴリズムを内側の木に繰り返すことで、 $\gamma_b(T)$ を求めることはできるのだろうか。
- nonradial treeの出現確率と比例関係にある条件は存在するのか。

ご清聴ありがとうございました。