

Spider と pendant edge を付けた道の broadcast domination

宮崎史郎

目次

- spiderとは
- spiderのbroadcast domination
- pendant edge とは
- pendant edge が ついた木のbroadcast domination

研究動機

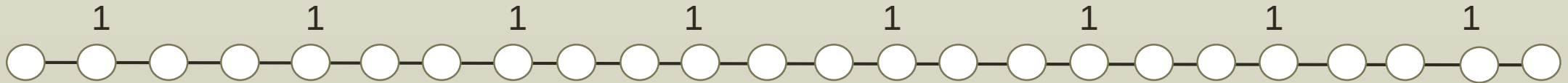
- 一般の木の broadcast domination number を与える式は知られていない
- 特別な木についての broadcast domination number を求めたい。

先行研究

- 特別な木である道のbroadcast domination number を求める公式は存在する

※頂点数 n の道 P のbroadcast domination number

$$\gamma_b(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (\text{Erwin 2004})$$

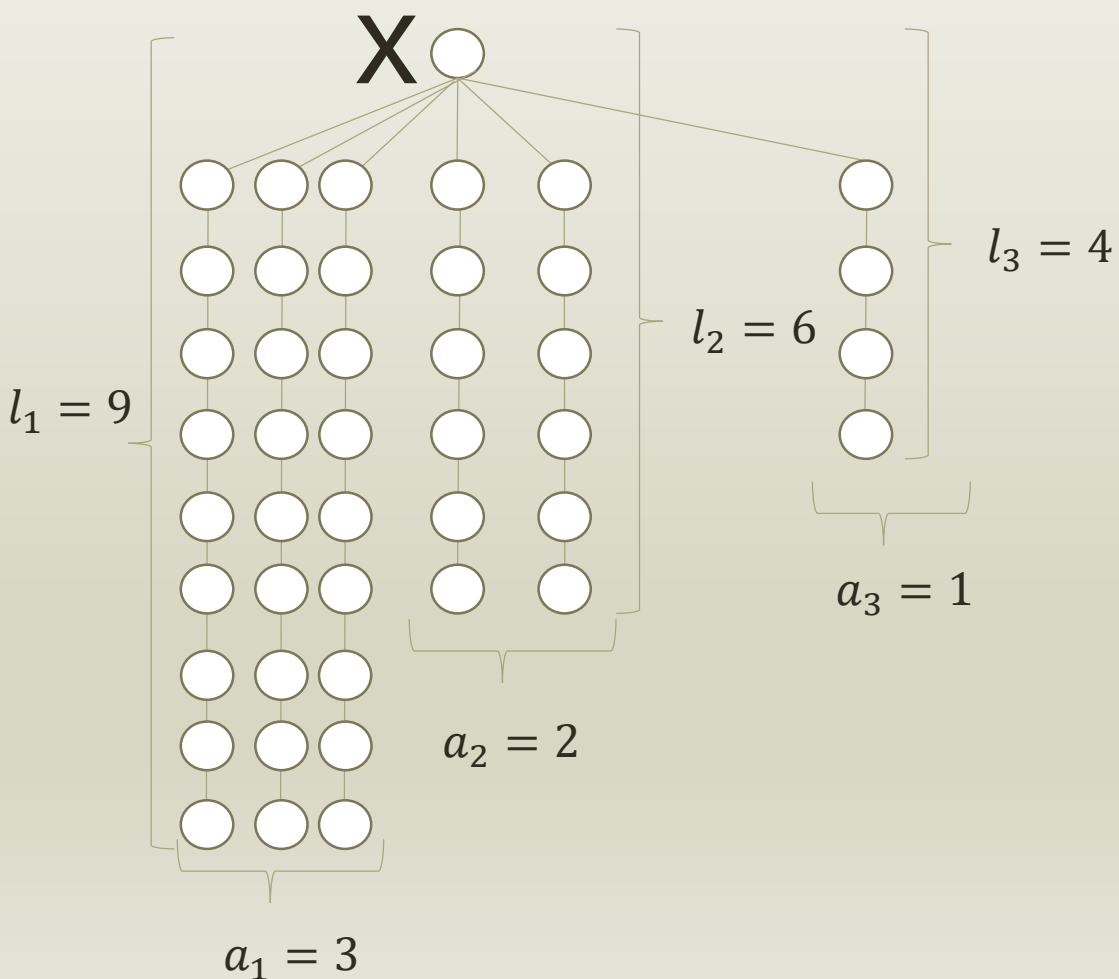


研究内容

1. spider の broadcast domination number を決定した
2. 道に pendant edge を付け加えた時の
broadcast domination number の変化を調べた

spiderとは

- 枝分かれが1点しか存在しない木



最長の道から順に道の長さを $l_1, l_2, \dots$ とする。
 l_1 の本数を a_1 , l_2 の本数を $a_2, \dots$ とする。

このようなグラフの x に値を割り振り、
broadcast dominationを考えていくこととする。

研究結果spiderについて

定理 spider の broadcast domination number は、
 l_1, l_2, l_3 と その本数の a_1, a_2 のみに依存する。
($l_4, l_5, \dots$ が存在しても broadcast domination number に影響しない)

枝分かれする枝の長さの種類が以下の場合を考える。

(i) l_1 のみ (ii) l_1, l_2 (iii) l_1, l_2, l_3

研究結果spiderについて

定理 spider の broadcast domination number は、
 l_1, l_2, l_3 とその本数の a_1, a_2 のみに依存する。
($l_4, l_5, \dots$ が存在しても broadcast domination number に影響しない)

枝分かれする枝の長さの種類が以下の場合を考える。

(i) l_1 のみ (ii) l_1, l_2 (iii) l_1, l_2, l_3

結果(i)

定理 1.1

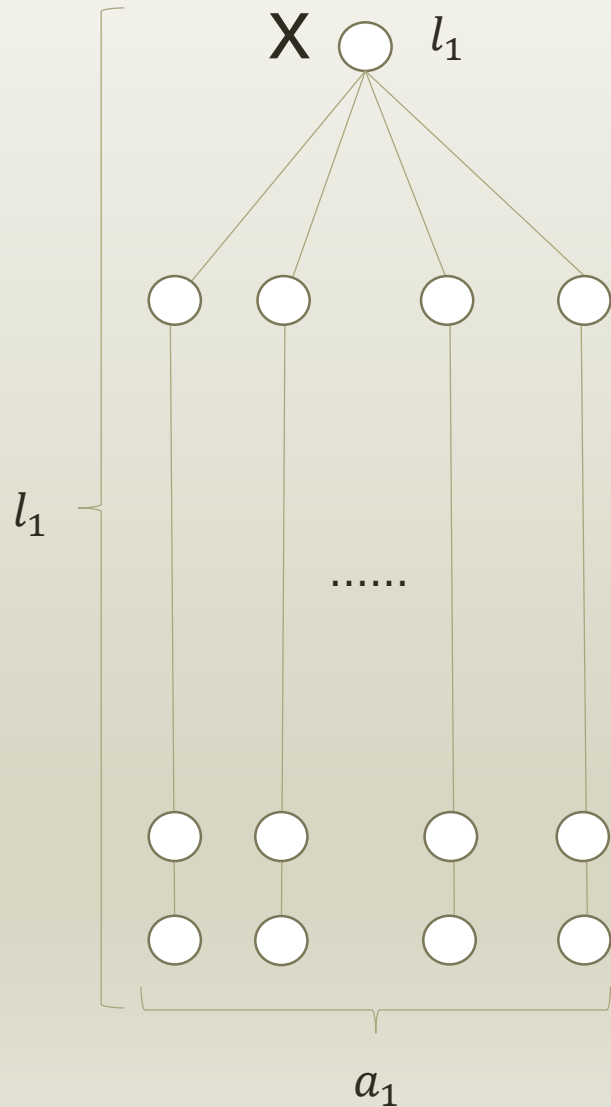
l_1 のみのspiderの broadcast domination number は

$$\gamma_b(S) = l_1$$

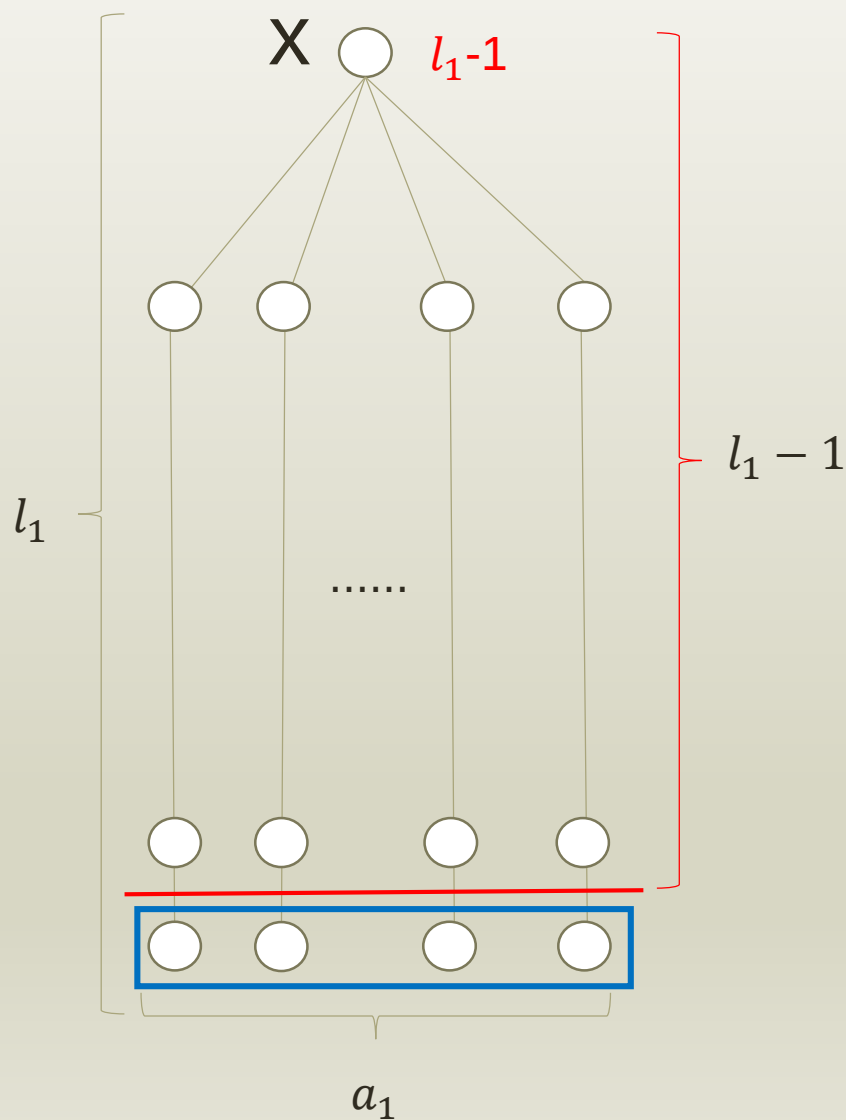
(証明) ($a_1 \geq 3$ に注意)

x に割り振る値として考えられる最大の値は l_1

x に l_1 を割り振ったとき $\gamma_b(S) = l_1$



結果(i)



定理 1.1

l_1 のみの spider の broadcast domination number は

$$\gamma_b(S) = l_1$$

(証明) ($a_1 \geq 3$ に注意)

x に割り振る値として考えられる最大の値は l_1

x に l_1 を割り振ったとき $\gamma_b(S) = l_1$

これよりも小さい値である $(l_1 - 1)$ を割り振ったとき、

$$\gamma_b(S) = l_1 - 1 + a_1$$

$$\geq l_1$$

以下帰納的に証明を続けることで broadcast domination number が l_1 より小さくならないことは示される。

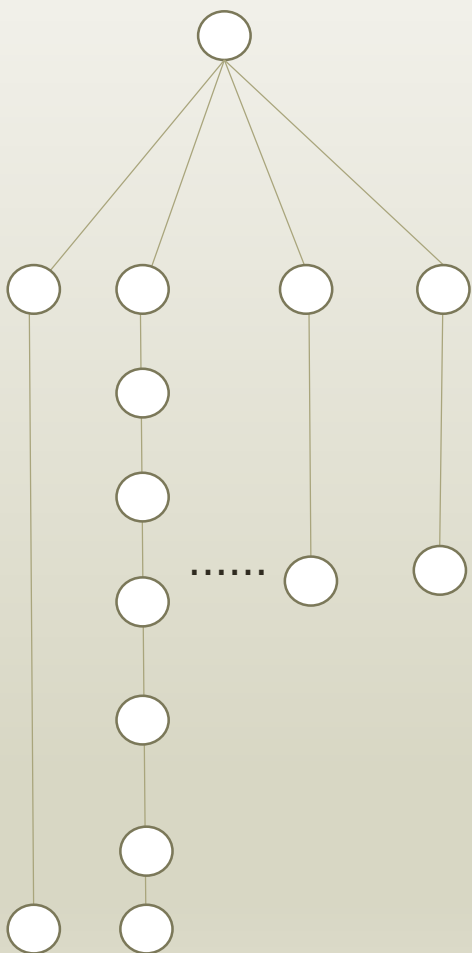
研究結果spiderについて

定理 spider の broadcast domination number は、
 l_1, l_2, l_3 と その本数の a_1, a_2 のみに依存する。
($l_4, l_5, \dots$ が存在しても broadcast domination number に影響しない)

枝分かれする枝の長さの種類が以下の場合を考える。

(i) l_1 のみ (ii) l_1, l_2 (iii) l_1, l_2, l_3

結果(ii)



定理 1.2

l_1, l_2 のみの spider の broadcast domination は以下の配置で与えられる。

(1) $a_1 = 1$ かつ $a_2 > 1$ のとき

→ x に l_2 を割り振り、残った部分には道の broadcast domination の考え方を適用する。

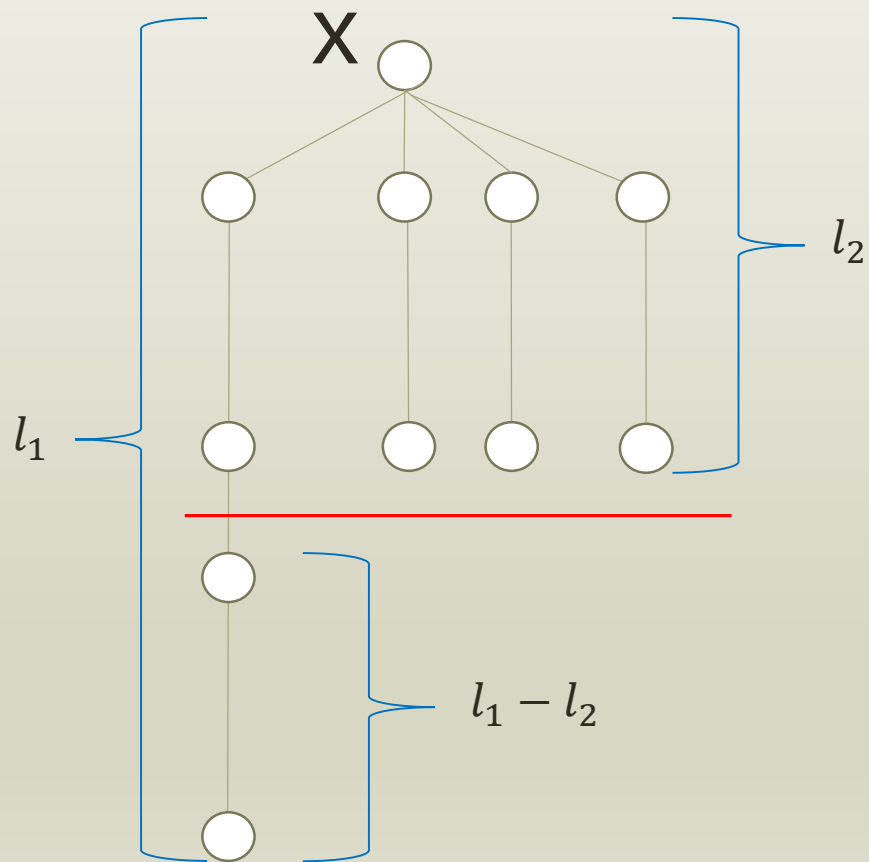
(2) $a_1 = 2$ のとき

→ l_1 の値によって x に l_2 もしくは $l_2 + 1$ のどちらかを割り振り、残った部分には道の broadcast domination の考え方を適用する。

(3) $a_1 \geq 3$ のとき

→ x に l_1 を割り振る。

(ii) (1) $a_1 = 1$ かつ $a_2 > 1$ のとき



- x に l_2 を割り振ったとき

→このグラフは

$$\left\lceil \frac{l_1 - l_2}{3} \right\rceil \times a_1 + l_2$$

で支配される。

- x に $l_2 - 3$ を割り振ったとき

$$\left\lceil \frac{l_1 - (l_2 - 3)}{3} \right\rceil \times a_1 + \left\lceil \frac{l_2 - (l_2 - 3)}{3} \right\rceil \times a_2 + l_2 - 3$$

$$= \left\lceil \frac{l_1 - l_2}{3} \right\rceil \times a_1 + a_1 + a_2 + l_2 - 3$$

l_2 と $l_2 - 3$ の割り振りの比較

xに $l_2 - 3$ を割り振ったとき

$$\left\lceil \frac{l_1 - l_2}{3} \right\rceil \times a_1 + a_1 + a_2 + l_2 - 3$$

xに l_2 を割り振ったとき

$$\left\lceil \frac{l_1 - l_2}{3} \right\rceil \times a_1 + l_2$$

$l_2 - 3$ を割り振ったほうが broadcast domination number が小さくなるとすると、

$$\left\lceil \frac{l_1 - l_2}{3} \right\rceil \times a_1 + a_1 + a_2 + l_2 - 3 < \left\lceil \frac{l_1 - l_2}{3} \right\rceil \times a_1 + l_2$$

$$a_1 + a_2 < 3$$

$a_1 = 1, a_2 > 1$ より矛盾

→ l_2 を割り振ったほうが broadcast domination number は小さい

同様に $l_2 + 3$ と比較しても l_2 を割り振るほうが良い

(ii) (2) $a_1 = 2$ のとき

- $a_1 = 2$ のとき a_2 の値にかかわらず
表の条件に対応する値が x に割り振るとき $\gamma_b(T)$ が最小になる

$l_2 \setminus l_1$	$l_1 \equiv 0 \pmod{3}$	$l_1 \equiv 1 \pmod{3}$	$l_1 \equiv 2 \pmod{3}$
$l_2 \equiv 0 \pmod{3}$	l_2	$l_2 + 1$	l_2 または $l_2 + 2$
$l_2 \equiv 1 \pmod{3}$	l_2 または $l_2 + 2$	l_2	$l_2 + 1$
$l_2 \equiv 2 \pmod{3}$	$l_2 + 1$	l_2 または $l_2 + 2$	l_2

(ii) (3) $a_1 \geq 3$ のとき

- a_2 の値にかかわらず l_1 を割り振るときが最小となる。

証明

l_1 で spider 全体を支配できるため l_1 より大きい値は考慮しない。

$l_1 - k$ ($k = 1, 2, \dots, l_1 - 1$) を割り振るとき、

$$\begin{aligned}\gamma_b(S) &= l_1 - k + \left\lceil \frac{l_1 - (l_1 - k)}{3} \right\rceil \times a_1 \\ &= l_1 - k + \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil a_1 \\ &\geq l_1\end{aligned}$$

研究結果spiderについて

定理 spider の broadcast domination number は、
 l_1, l_2, l_3 と その本数の a_1, a_2 のみに依存する。
($l_4, l_5, \dots$ が存在してもbroadcast domination number に影響しない)

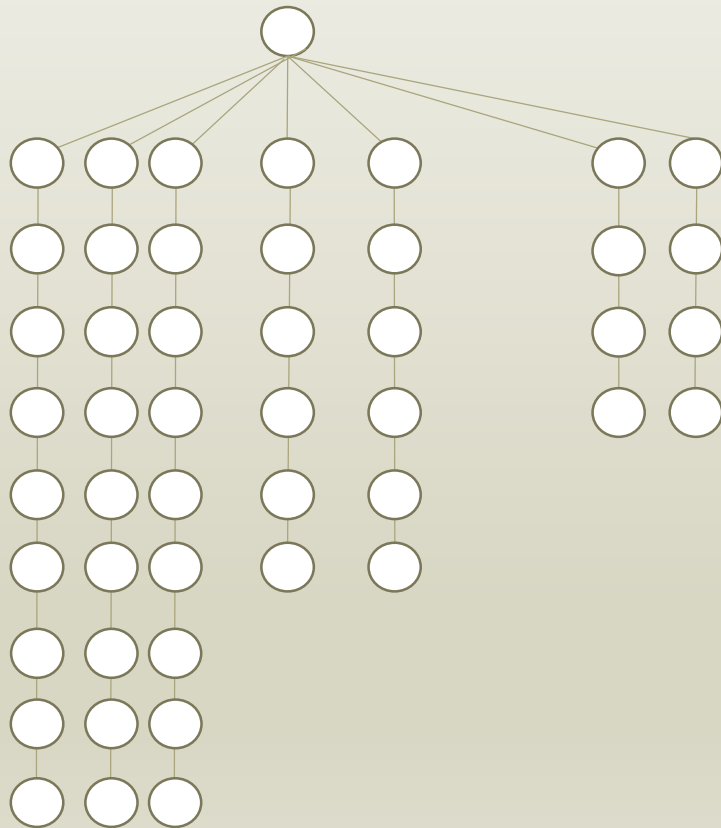
枝分かれする枝の長さの種類が以下の場合を考える。

(i) l_1 のみ (ii) l_1, l_2 (iii) l_1, l_2, l_3

(iii) l_1, l_2, l_3

定理1.3

l_1, l_2, l_3 のみの spider の broadcast domination は以下の配置で与えられる。



- ① $a_1 = 1, a_2 = 1$ のとき
- ② $a_1 = 1, a_2 \geq 2$ のとき
- ③ $a_1 \geq 2$ のとき

※いずれのパターンも a_3 の値によらない。

1.3 ①

$a_1 = 1, a_2 = 1$ のとき

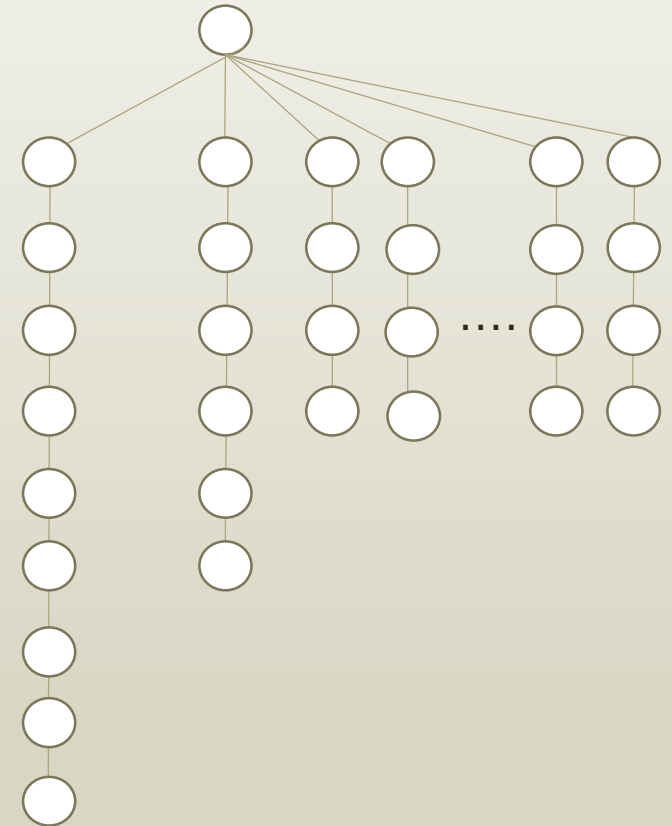
a_3 の値に関わらず

または、 $l_1 \equiv 0$ かつ $l_2 \equiv 0$ かつ $l_3 \equiv 2 \pmod{3}$

または、 $l_1 \equiv 1$ かつ $l_2 \equiv 1$ かつ $l_3 \equiv 0 \pmod{3}$

または、 $l_1 \equiv 2$ かつ $l_2 \equiv 2$ かつ $l_3 \equiv 1 \pmod{3}$

この条件が満たされるとき、 $x!$ には $l_3 + 1$ を
それ以外では l_3 を割り振ればよい



定理1.3 ②,③

② $a_1 = 1, a_2 \geq 2$ のとき

→ x に l_2 を割り振る

②,③ともに l_3 の本数の値によらない

③ $a_1 \geq 2$ のとき

→ 定理1.2の値の振り方を適用する。

定理 1.2

l_1, l_2 のみの spider の broadcast domination は
以下の配置で与えられる。

(1) $a_1 = 1$ かつ $a_2 > 1$ のとき

→ x に l_2 を割り振り、残った部分には道の broadcast domination の考え方を適用する。

(2) $a_1 = 2$ のとき

→ l_1 の値によって x に l_2 もしくは $l_2 + 1$ のどちらかを
割り振り、残った部分には道の broadcast
domination の考え方を適用する。

(3) $a_1 \geq 3$ のとき

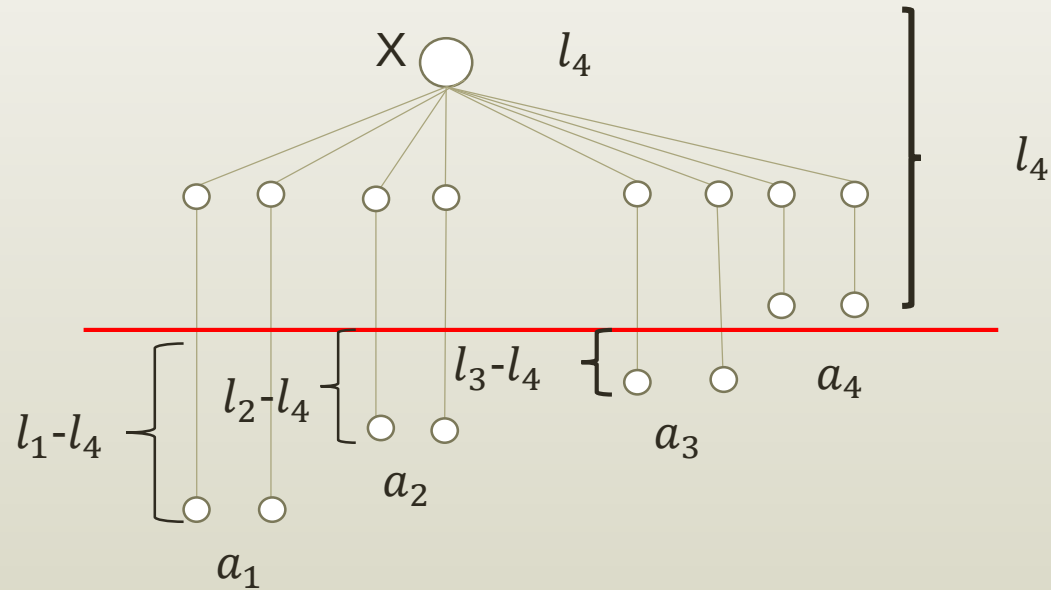
→ x に l_1 を割り振る。

$a_1 = 2$ のときの対応表

$l_2 \setminus l_1$	$l_1 \equiv 0 \pmod{3}$	$l_1 \equiv 1 \pmod{3}$	$l_1 \equiv 2 \pmod{3}$
$l_2 \equiv 0 \pmod{3}$	l_2	$l_2 + 1$	l_2 または $l_2 + 2$
$l_2 \equiv 1 \pmod{3}$	l_2 または $l_2 + 2$	l_2	$l_2 + 1$
$l_2 \equiv 2 \pmod{3}$	$l_2 + 1$	l_2 または $l_2 + 2$	l_2

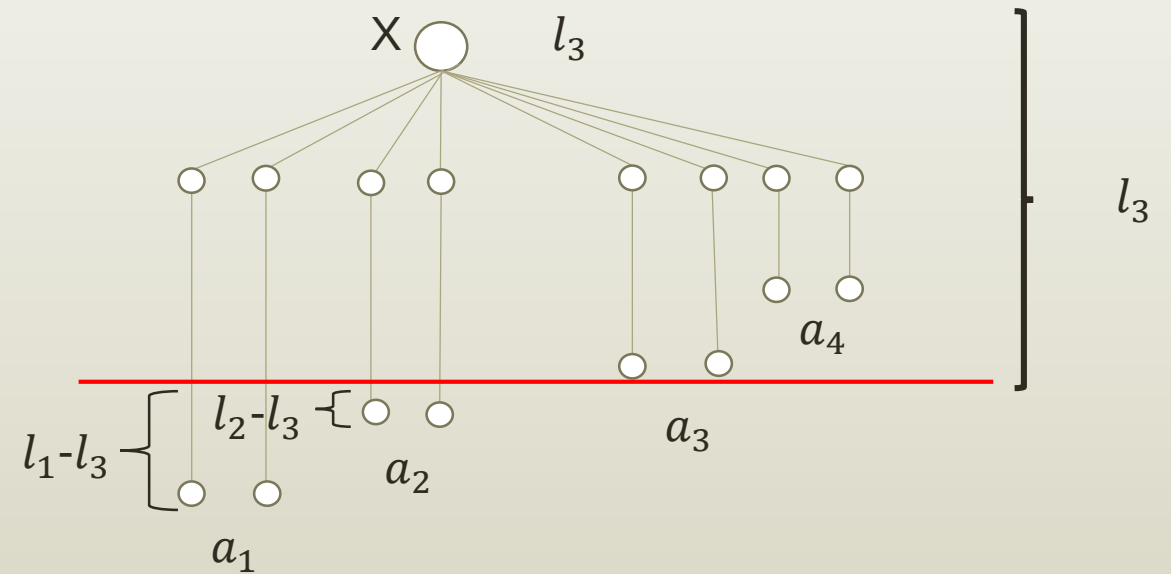
$l_4, l_5, \dots$ が存在する場合

Xに l_4 を割り振る



$$\gamma_b(S) = l_4 + \left\lfloor \frac{l_1 - l_4}{3} \right\rfloor \times a_1 + \left\lfloor \frac{l_2 - l_4}{3} \right\rfloor \times a_2 + \left\lfloor \frac{l_3 - l_4}{3} \right\rfloor \times a_3$$

Xに l_3 を割り振る



$$\gamma_b(S) = l_3 + \left\lfloor \frac{l_1 - l_3}{3} \right\rfloor \times a_1 + \left\lfloor \frac{l_2 - l_3}{3} \right\rfloor \times a_2$$

$\left\lfloor \frac{l_1 - l_4}{3} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{l_1 - l_3}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{l_2 - l_4}{3} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{l_2 - l_3}{3} \right\rfloor$ であるから、 l_4 を割り振る方が γ_b が小さくなることはない。

研究結果spiderについて

定理 spider の broadcast domination number は、
 l_1, l_2, l_3 と その本数の a_1, a_2 のみに依存する。
($l_4, l_5, \dots$ が存在しても broadcast domination number に影響しない)

$l_4, l_5, \dots$ が存在する場合

よって、 $l_4, l_5, \dots$ と枝分かれが、どれだけ存在しても、 ℓ_n と ℓ_{n-1} の比較を繰り返し行くと l_3 と l_4 の比較に到達し、 l_4 を割り振るよりも l_3 を割り振ったほうが適切であるといった結果が得られる。

以上よりspiderのbroadcast domination を考える際、最も長い枝、二番目に長い枝、三番目に長い枝とそれぞれその本数にのみ注目すればよい。

目次

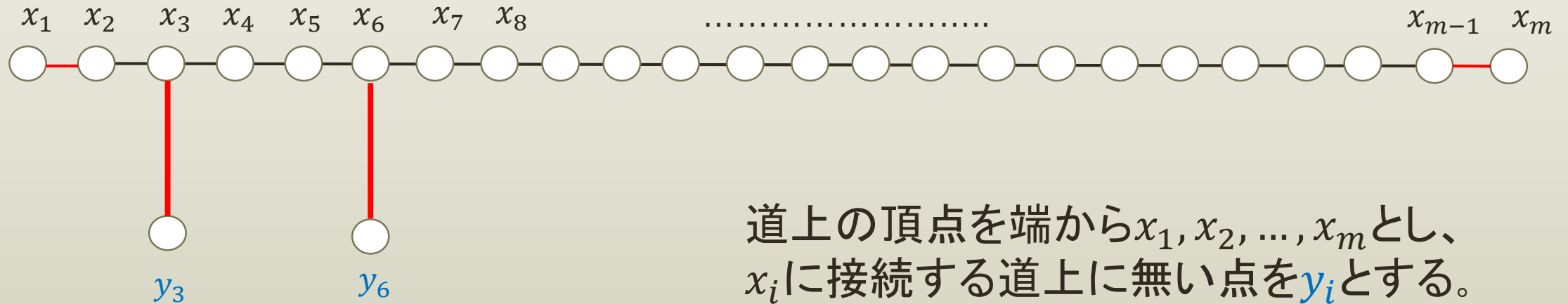
- spiderとは
- spiderのbroadcast domination
- pendant edge とは
- pendant edge がついた道のbroadcast domination

目次

- spiderとは
- spiderのbroadcast domination
- pendant edge とは
- pendant edge が ついた道のbroadcast domination

pendant edge とは

次数が1の頂点に接続する辺を **pendant edge** と呼ぶ。



道上の頂点を端から $x_1, x_2, \dots, x_m$ とし、 x_i に接続する道上に無い点を y_i とする。

研究内容

道にpendant edge を付け加えた時の broadcast domination number の変化を調べた

頂点数 k の道 P_k

P_k にpendant edge を接続した木 を T とする。

このとき $\gamma_b(T) = \gamma_b(P_k) + 1$ となる最小のpendant edge の本数と、
接続する道上の頂点はどこか。

結果

$\gamma_b(T) = \gamma_b(P_k) + 1$ とするために必要な pendant edge の最小の本数 e は以下のように決まる。

$$e = \begin{cases} 1 & (k = 3n \text{ のとき}) \\ 3 & (k = 3n + 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (k = 3n + 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

結果

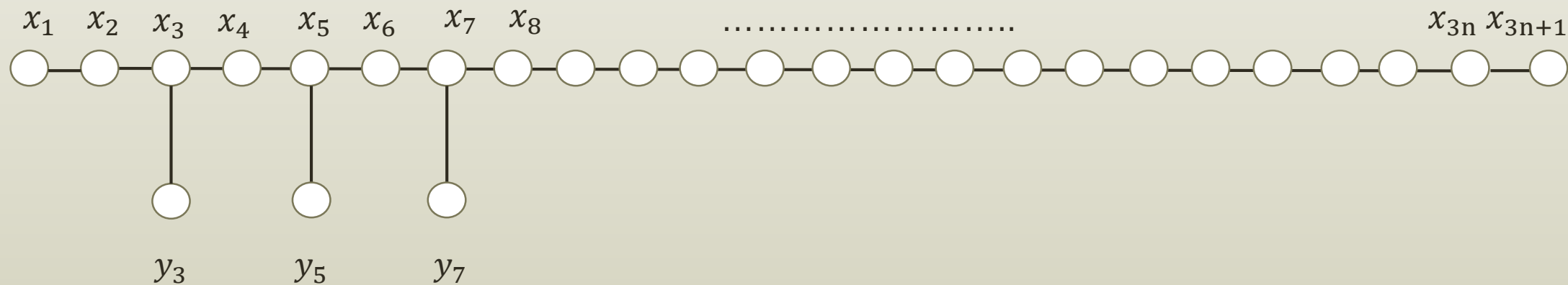
$\gamma_b(T) = \gamma_b(P_k) + 1$ とするために必要な pendant edge の最小の本数 e は以下のように決まる。

$$e = \begin{cases} 1 & (k = 3n \text{ のとき}) \\ 3 & (k = 3n + 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (k = 3n + 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下頂点数がそれぞれ $3n$, $3n+1$, $3n+2$ の道について、
どのように pendant edge をつければ $\gamma_b(T) = \gamma_b(P_k) + 1$ となるかを、
 $\gamma_b(T) \neq \gamma_b(P_k)$ となることを利用して示す。

P_{3n+1} について

下のグラフのように、 x_3, x_5, x_7 にpendant edge をつければ、
 $\gamma_b(T) \neq \gamma_b(P_{3n+1})$ となる。



P_{3n+1} について

$$\gamma_b(P_{3n+1}) = \left\lceil \frac{3n+1}{3} \right\rceil = n+1 \text{ である。}$$

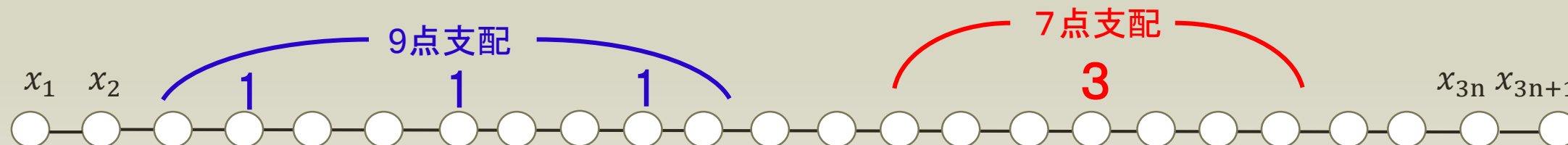
$n+1$ で支配できる点は最大 $3n+3$ 点であり、
元の道の頂点数と比較すると2点分多く支配することができる。

このことを利用すると、道に割り振ることのできる値は、
 P_{3n} の時のように1のみとならず、最大3を割り振ることができる。

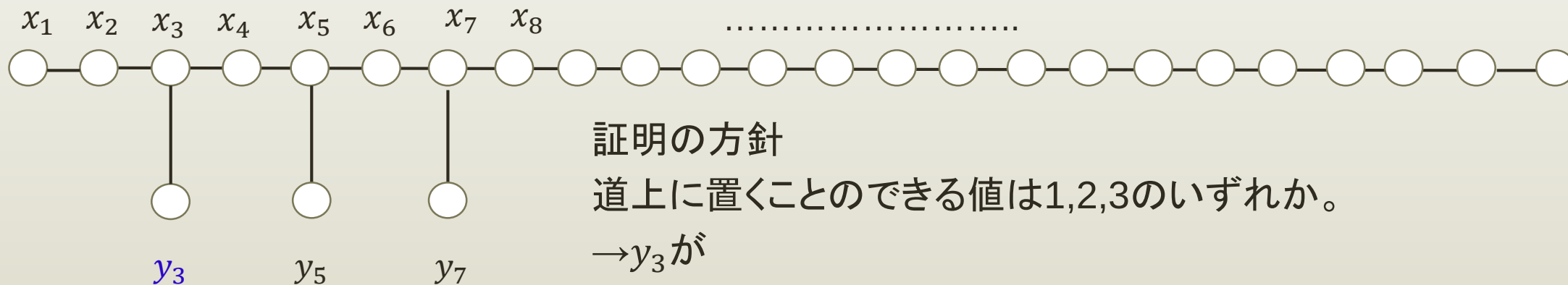
3という値を1ずつ道に割り振ったとき支配できる点は最大9点

3を道に割り振ったとき支配できる点は最大7点

この差2を $n+1$ で余分に支配できることに活用する



P_{3n+1} について



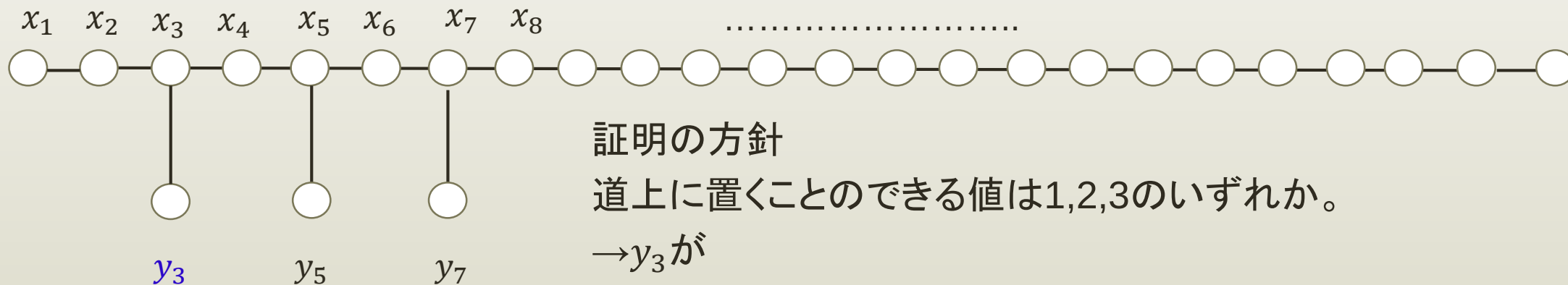
証明の方針

道上に置くことのできる値は1,2,3のいずれか。

→ y_3 が

- (i) 1で支配される
- (ii) 2で支配される
- (iii) 3で支配される

P_{3n+1} について



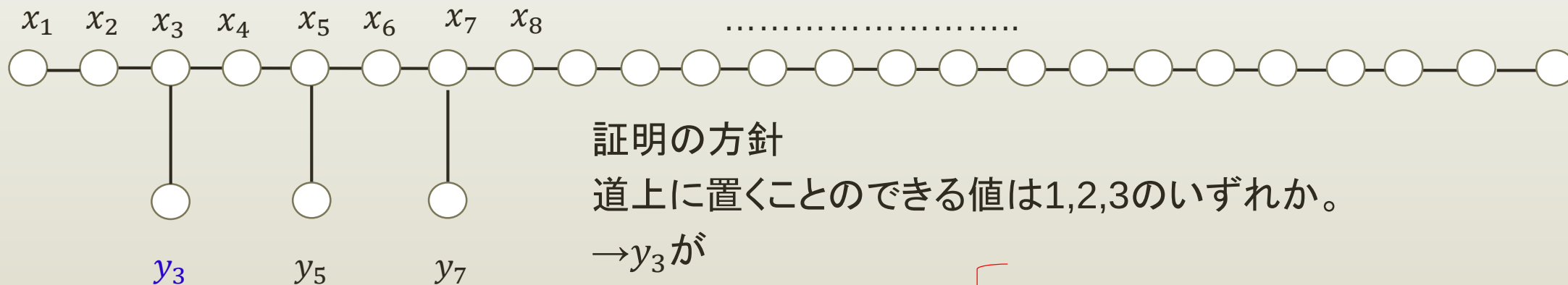
証明の方針

道上に置くことのできる値は1,2,3のいずれか。

→ y_3 が

- (i) 1で支配される
- (ii) 2で支配される
- (iii) 3で支配される

P_{3n+1} について



証明の方針

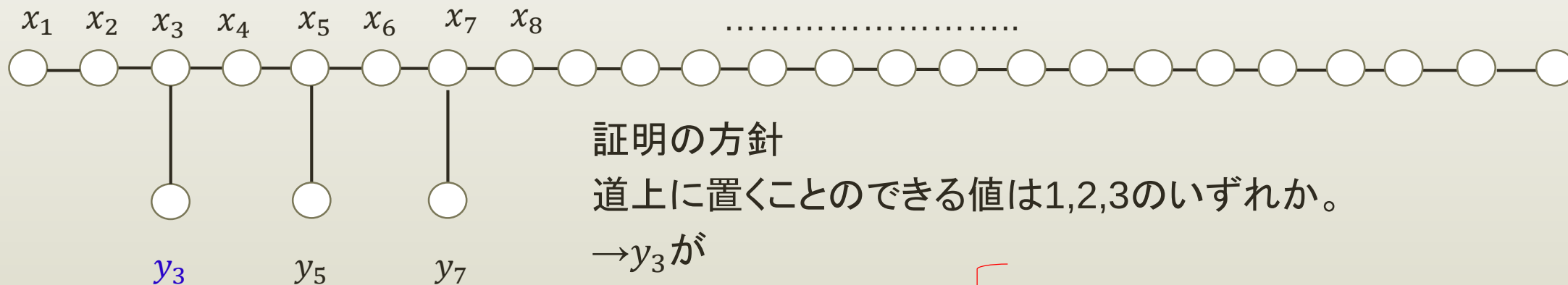
道上に置くことのできる値は1,2,3のいずれか。

→ y_3 が

- (i) 1で支配される
- (ii) **2で支配される**
- (iii) 3で支配される

- ① x_2 に2が置かれ y_3 が支配される。
- ② x_3 に2が置かれ y_3 が支配される。
- ③ x_4 に2が置かれ y_3 が支配される。

P_{3n+1} について



証明の方針

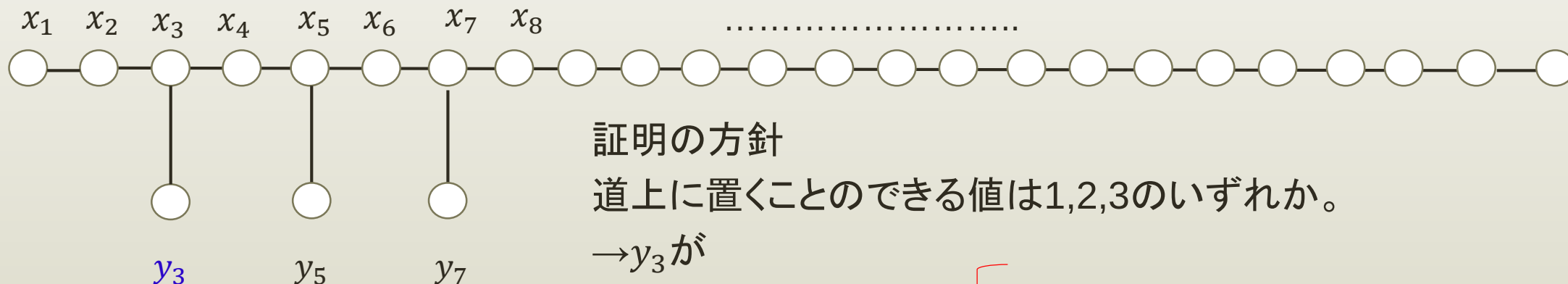
道上に置くことのできる値は1,2,3のいずれか。

→ y_3 が

- (i) 1で支配される
- (ii) 2で支配される
- (iii) 3で支配される

- ① x_2 に2が置かれ y_3 が支配される。
- ② x_3 に2が置かれ y_3 が支配される。
- ③ x_4 に2が置かれ y_3 が支配される。

P_{3n+1} について



証明の方針

道上に置くことのできる値は1,2,3のいずれか。

→ y_3 が

- (i) 1で支配される
- (ii) 2で支配される
- (iii) 3で支配される

- ① x_2 に2が置かれ y_3 が支配される。
- ② x_3 に2が置かれ y_3 が支配される。
- ③ x_4 に2が置かれ y_3 が支配される。

このいずれかで y_3 が支配されるとき、常に $\gamma_b(T) \neq \gamma_b(P_{3n+1})$ であることを示す。(今回は赤文字のみ)

P_{3n+1} について

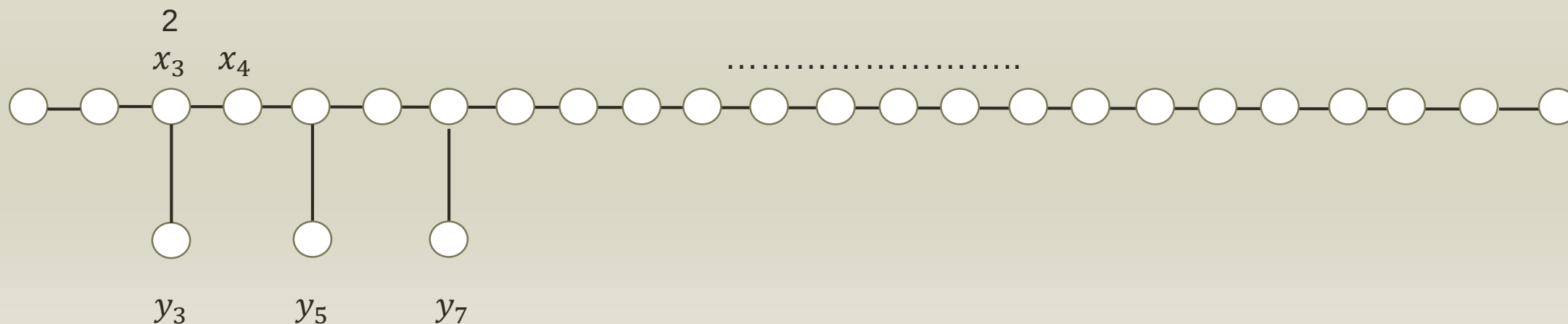
(ii) y_3 が2で支配されるとき

② x_3 に2が割り振られるとき

→残る支配されていない点は y_5, y_7 と $x_6 \sim x_{3n+1}$

→ y_5 を支配する値は必ず同時に x_5 も支配するため x_5 も支配されていないと考えてよい

→残る形は $y_5x_5 \sim x_{3n+1}$ の道に y_7 がついたグラフと見て取れる。



P_{3n+1} について

・ y_3 が2で支配されるとき

② x_3 に2が割り振られるとき

→残る支配されていない点は y_5 と $x_6 \sim x_{3n+1}$

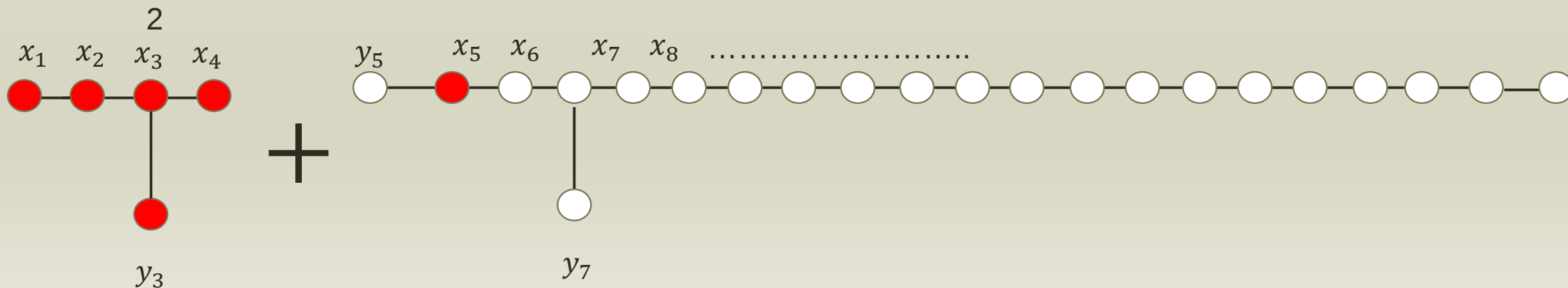
→ y_5 を支配する値は必ず同時に x_5 も支配するため x_5 も支配されていないと考えてよい

→残る形は $y_5 x_5 \sim x_{3n+1}$ の道に y_7 がついたグラフと見て取れる。

道の頂点数は $3n - 2$ でありこれの支配に必要な値は $\left\lceil \frac{3n-2}{3} \right\rceil = n$ である。

すでに2割り振っているため、残る道には $n - 1$ までしか割り振ることはできない。

→ y_3 は2で支配できない



まとめ

Spider について

定理 spider の broadcast domination number は、
 l_1, l_2, l_3 と その本数の a_1, a_2 のみに依存する。
($l_4, l_5, \dots$ が存在しても broadcast domination number に影響しない)

まとめ

$\gamma_b(T) = \gamma_b(P_k) + 1$ を満たす pendant edge の本数とつけ方は、道 P の頂点数 k によって決まる。

$k = 3n$ のとき $\rightarrow$ 1本 (x_3 につける)

$k = 3n + 1$ のとき $\rightarrow$ 3本 (x_3, x_5, x_7 につける)

$k = 3n + 2$ のとき $\rightarrow$ 2本 (x_3, x_5 につける)

今後の課題

$\gamma_b(T) = \gamma_b(P_k) + 2$ となる pendant edge のつけ方は？

$k = 3n$ のとき 加える pendant edge が5本

$k = 3n + 1$ のとき 加える pendant edge が6本

$k = 3n + 2$ のとき ？

また、これらの broadcast domination number を求める公式

ご清聴ありがとうございました。