ラダーグラフの Metric Dimension

斉藤研究室

5416005 内田　智大

目次

- 研究動機
- ラダーグラフのMetric Dimension
- メビウスラダーのMetric Dimension
- 3次元への拡張
- まとめ

研究動機

なぜラダーグラフを選んだのか？

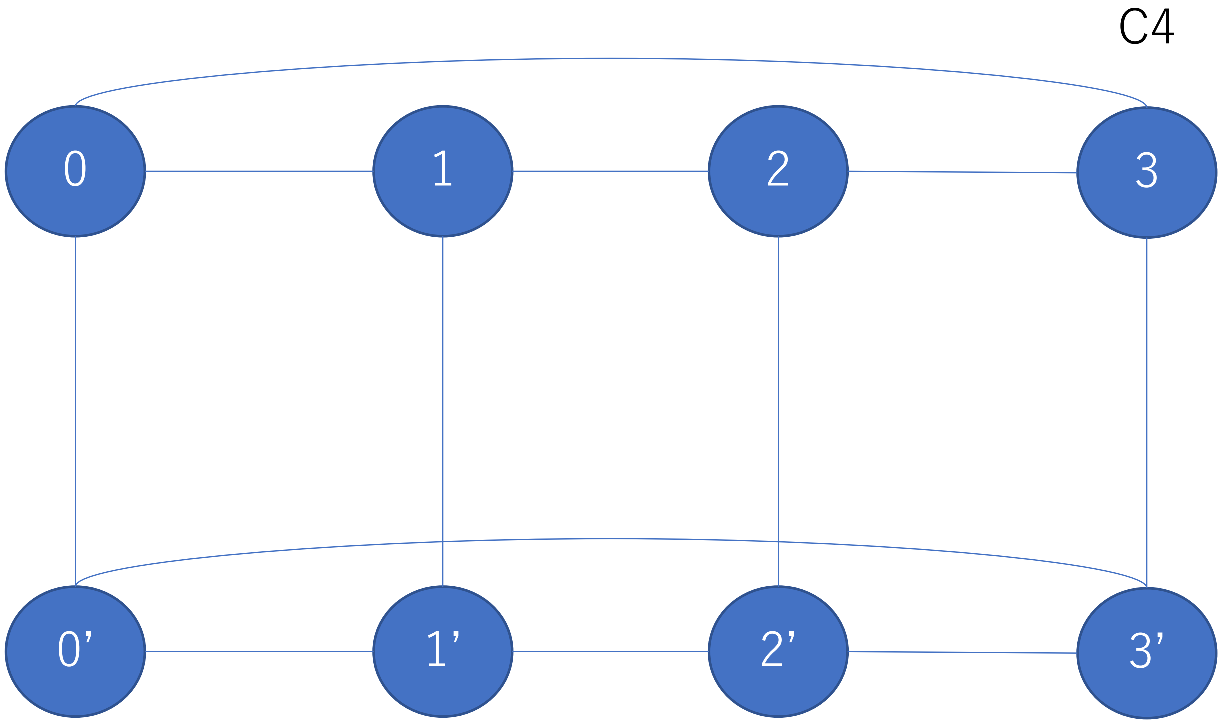
- 通常のグラフではmetric dimensionを求めるのは難しいため基本的なグラフのラダーグラフを選んだ

ラダーグラフを応用し3次元に拡張したときはどうなるのか?

位数nのサイクルをCnとする。

ラダーグラフ

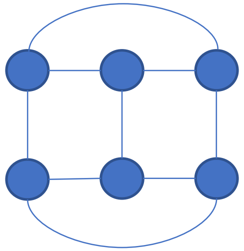
サイクルとそのコピーの
対応する頂点を辺で
結んでできるグラフ



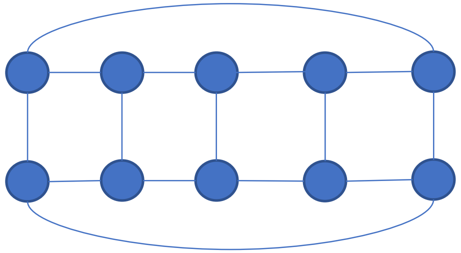
奇数ラダーと偶数ラダー

位数nのサイクルをCnとする。

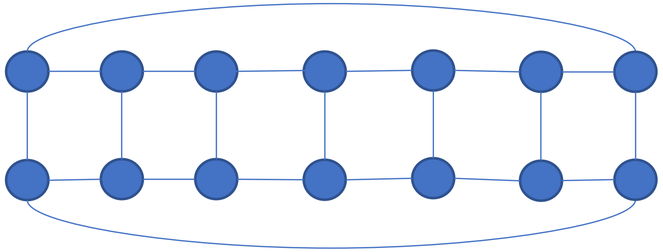
奇数ラダー



n=3



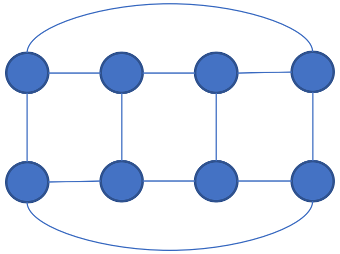
n=5



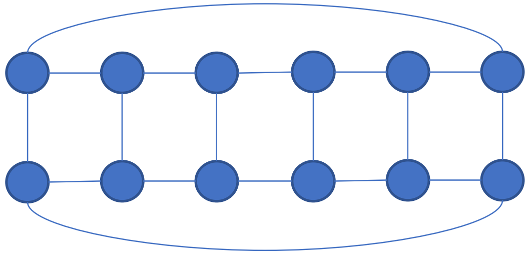
n=7

偶数ラダー

n=4



n=6



結果１

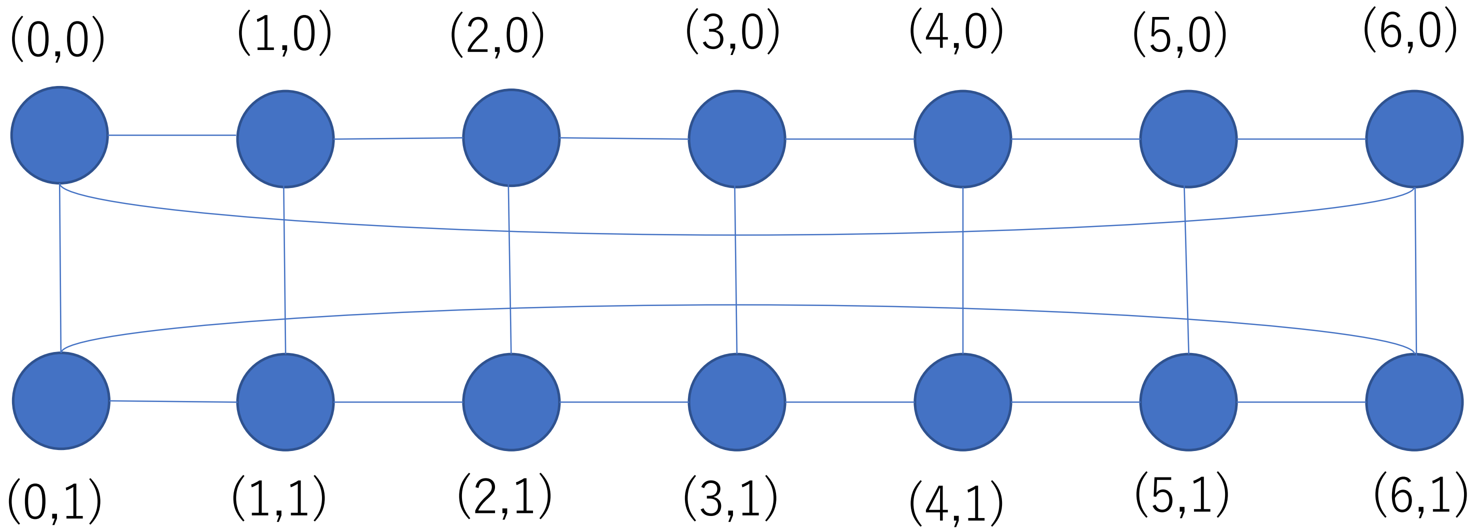
定理

　奇数ラダーのmetric dimension = 2

2個のセンサーで区別できる
1個のセンサーでは区別できない

証明　(2m+1,2)ラダーを考える

2m+1 = 7　　**m = 3**

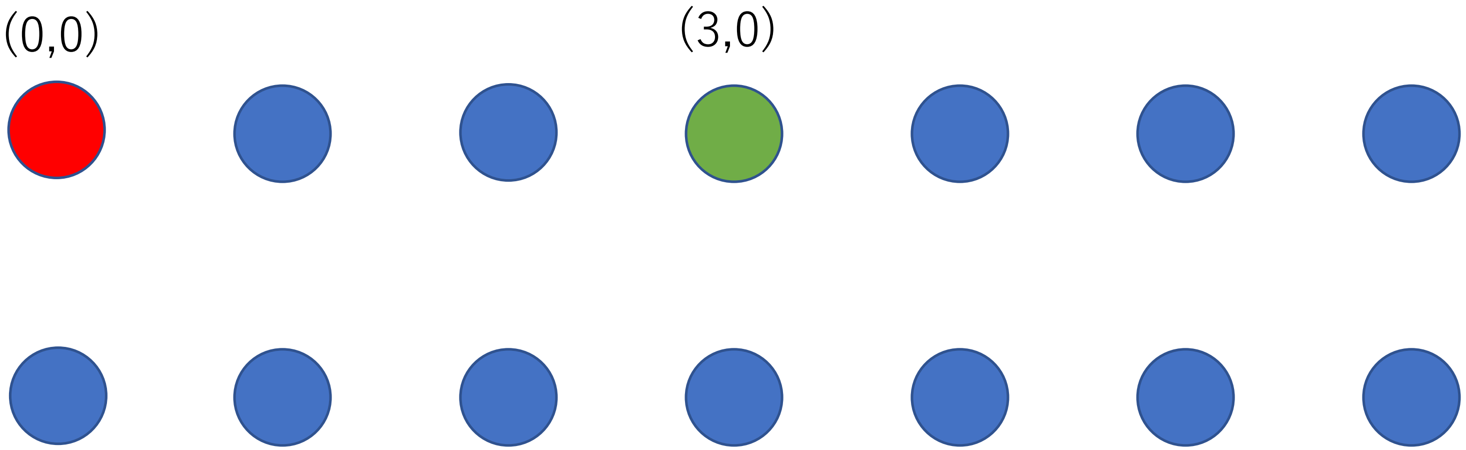


②辺を省略

①各頂点に座標を付ける

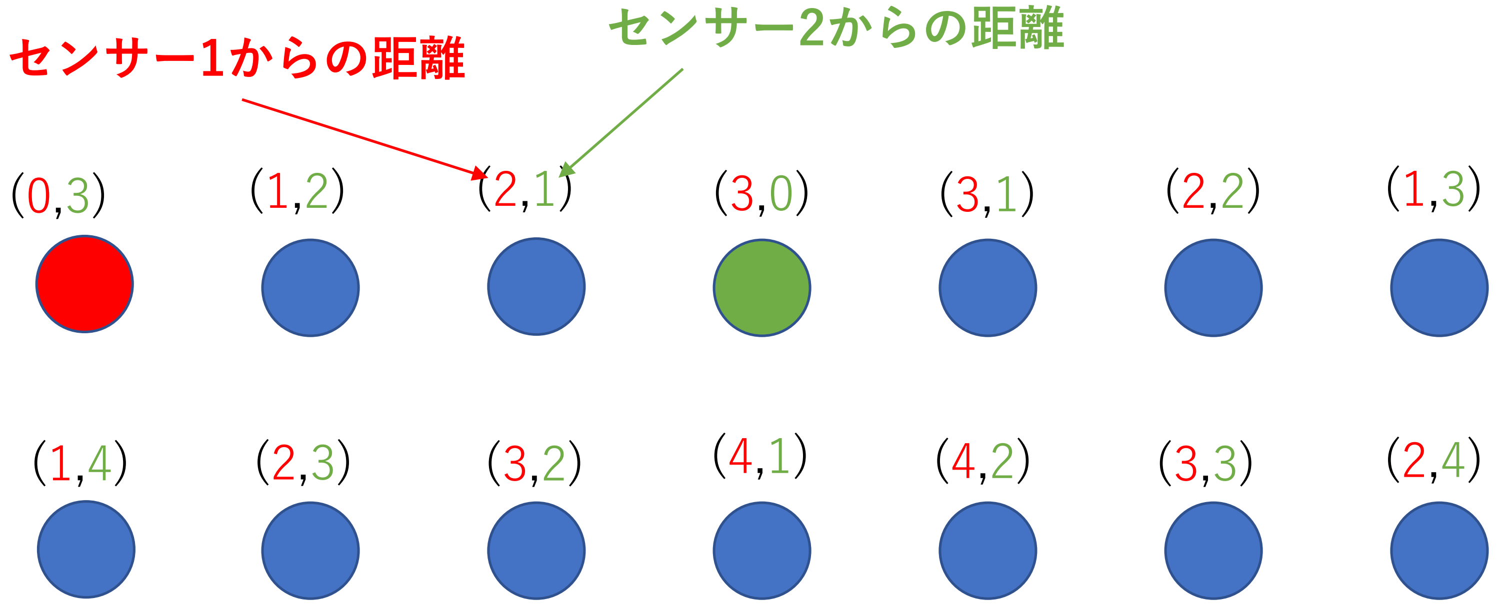
証明　2個のセンサーで区別できる

2m+1 = 7　　**m = 3**



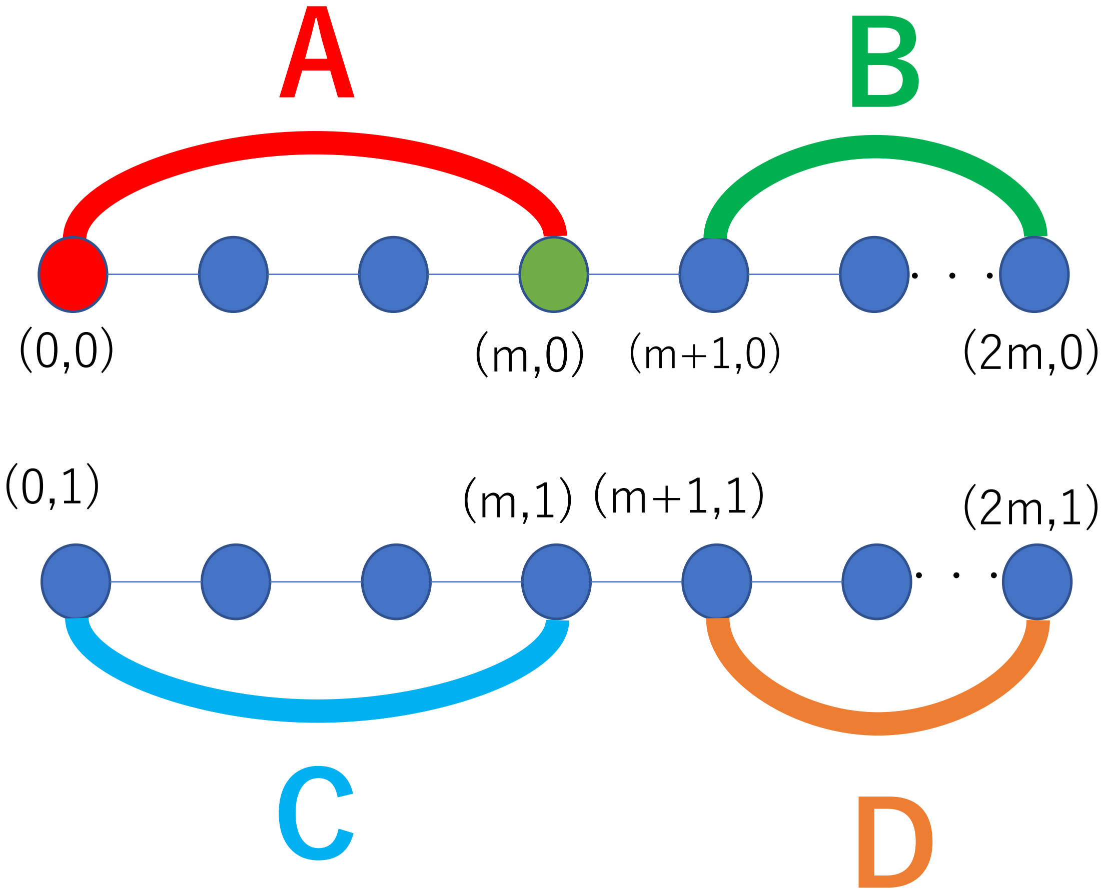
センサーを(0,0),(m,0)に置く

証明　2個のセンサーで区別できる



センサーを(0,0),(m,0)に置く

証明　2個のセンサーで区別できる

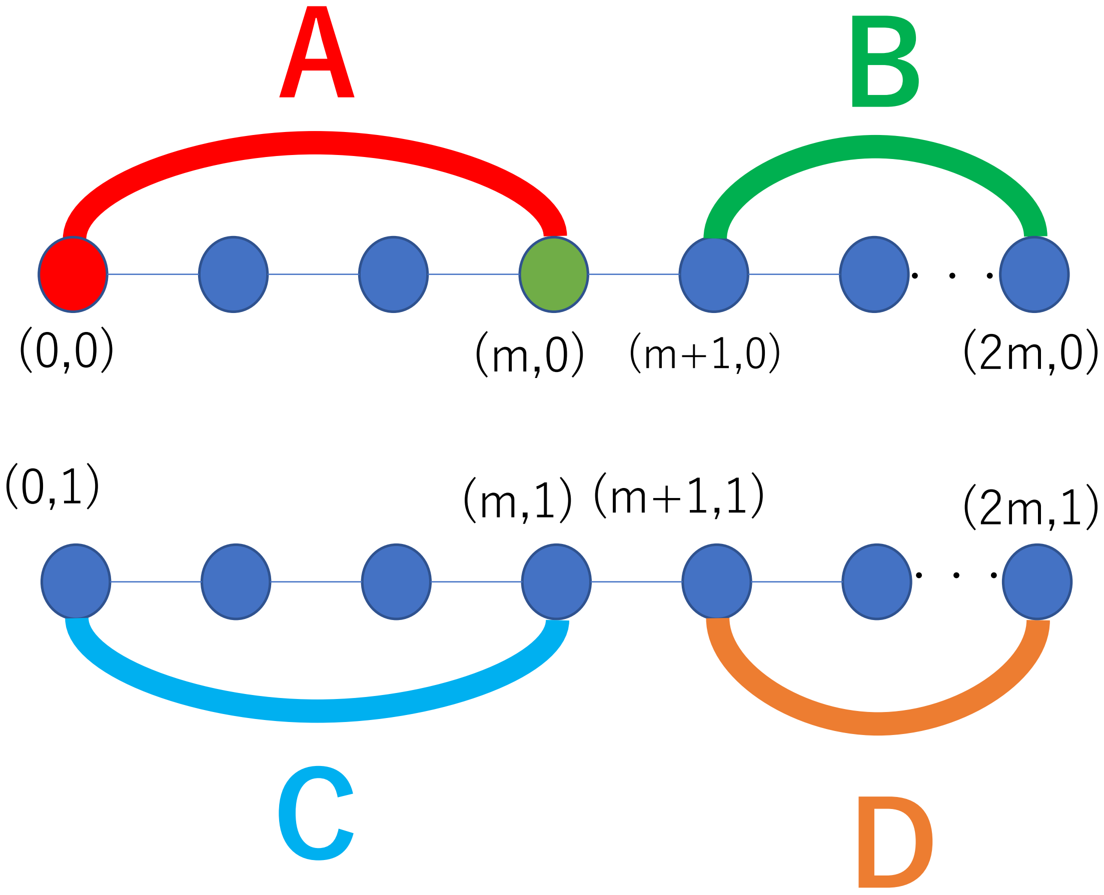


(s,t)の距離ベクトル

(s,t)の位置	距離ベクトル
A	(s,m-s)
B	(2m+1-s,s-m)
C	(s+1,m-s+1)
D	(2m+2-s,s-m+1)

任意の頂点を(s,t)とする。

証明　2個のセンサーで区別できる

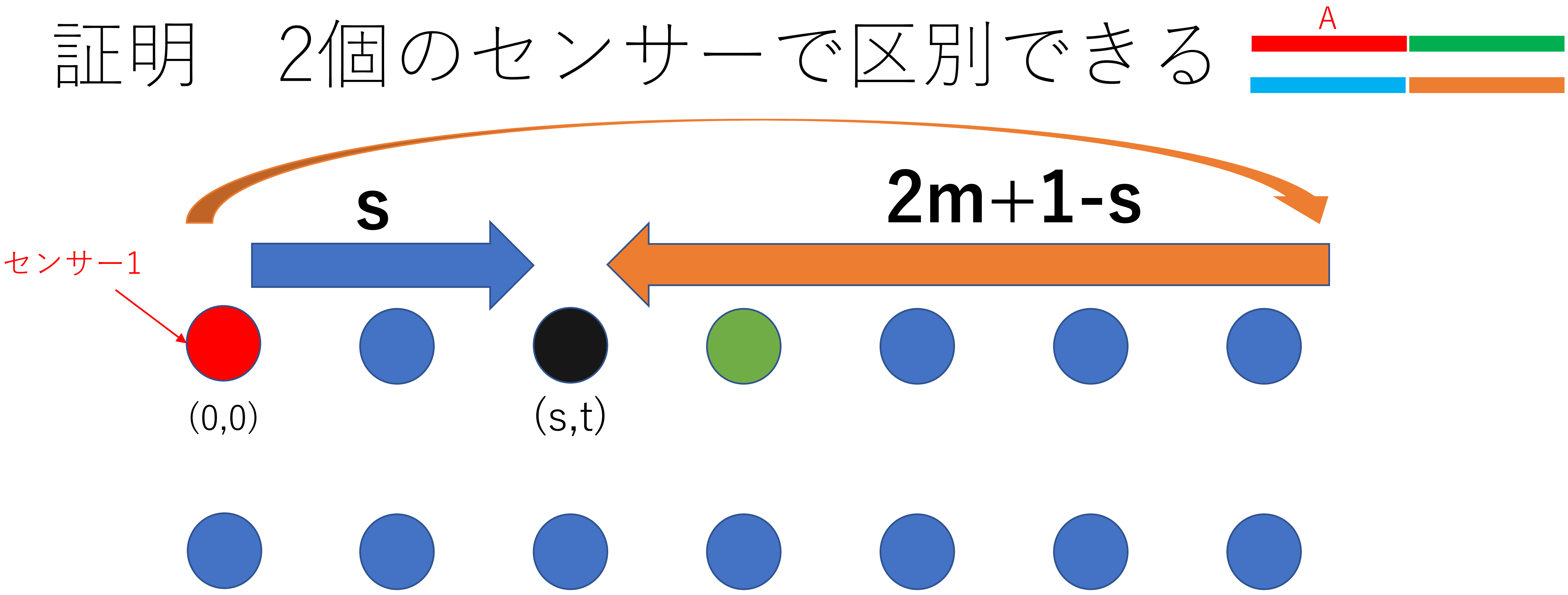


任意の頂点を(s,t)とする。

(s,t)の距離ベクトル

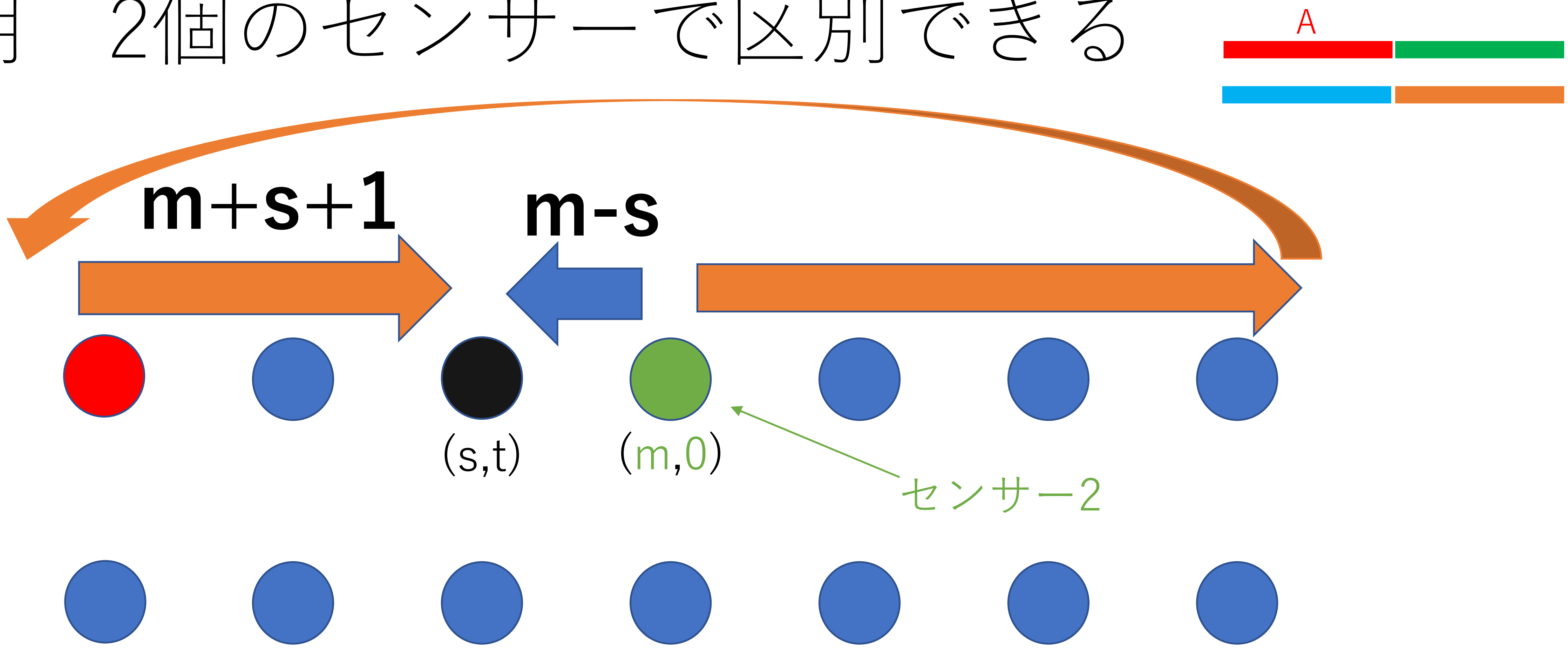
(s,t)の位置	距離ベクトル
A	(s,m-s)
B	(2m+1-s,s-m)
C	(s+1,m-s+1)
D	(2m+2-s,s-m+1)

証明　2個のセンサーで区別できる



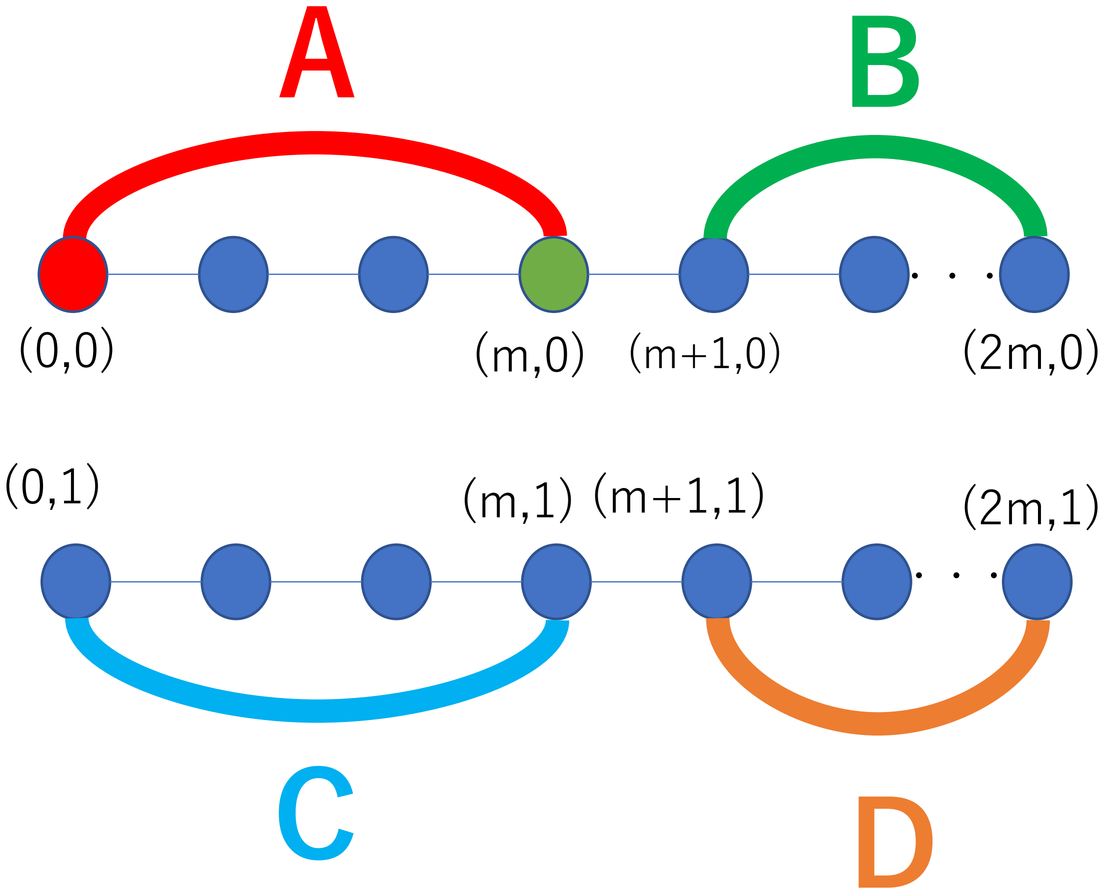
センサー1からの距離　＝　$\min\{s, 2m+1-s\} = s$

証明　2個のセンサーで区別できる



センサー2からの距離 = min{m-s,m+s+1} = m-s

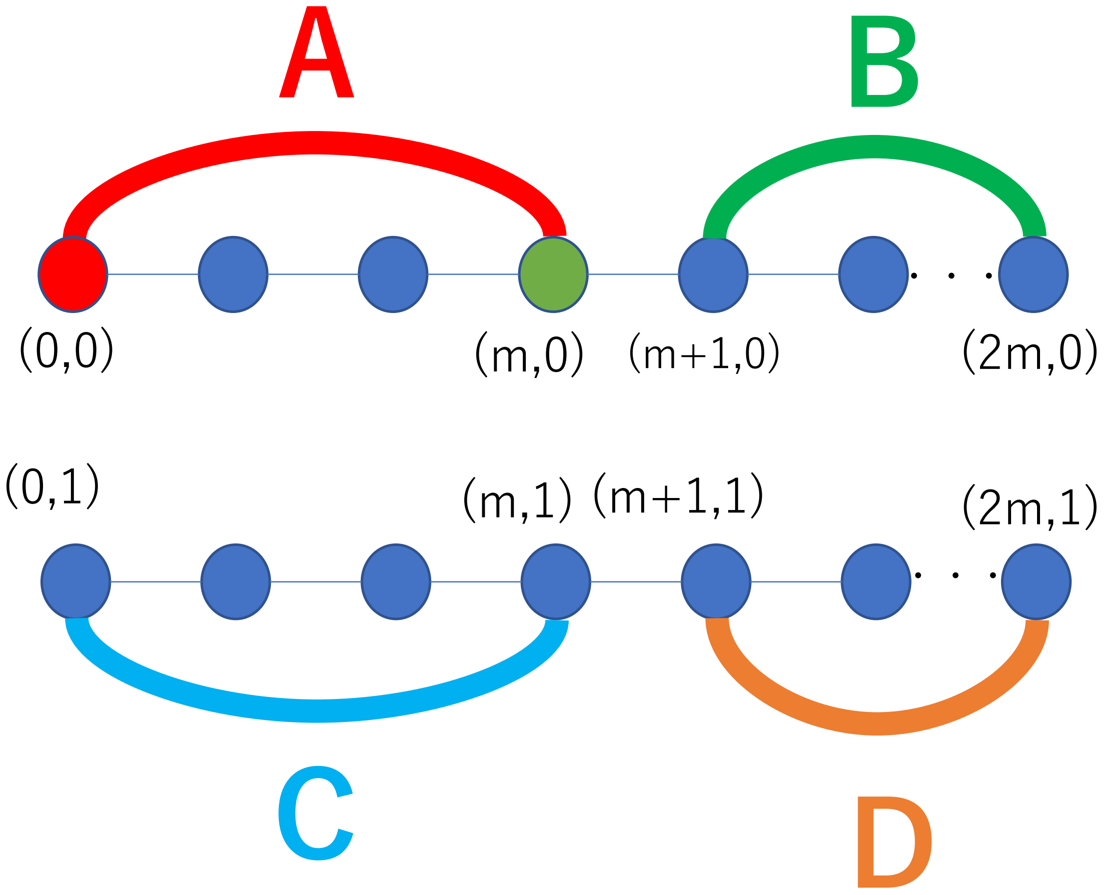
証明　2個のセンサーで区別できる



(s,t)の距離ベクトル

(s,t)の位置	距離ベクトル
A	(s,m-s)
B	(2m+1-s,s-m)
C	(s+1,m-s+1)
D	(2m+2-s,s-m+1)

証明　2個のセンサーで区別できる

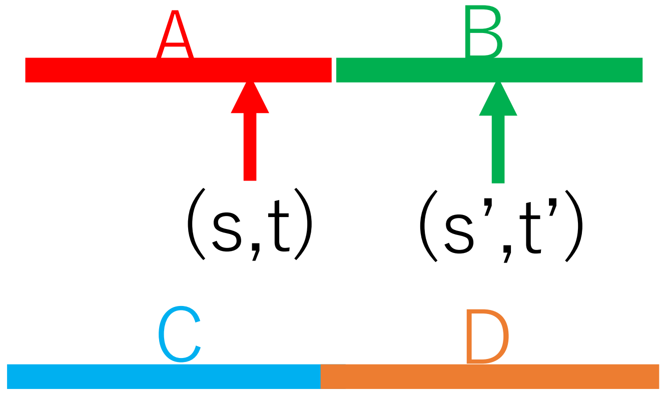


(s,t)の距離ベクトル

(s,t)の位置	距離ベクトル
A	(s,m-s)
B	(2m+1-s,s-m)
C	(s+1,m-s+1)
D	(2m+2-s,s-m+1)

これらの距離ベクトルの中に同じ値がないことを調べる。

証明　2個のセンサーで区別できる



例えばAとBに同じベクトルがあるとすると、

$$(s, m-s) = (2m+1-s', s'-m)$$

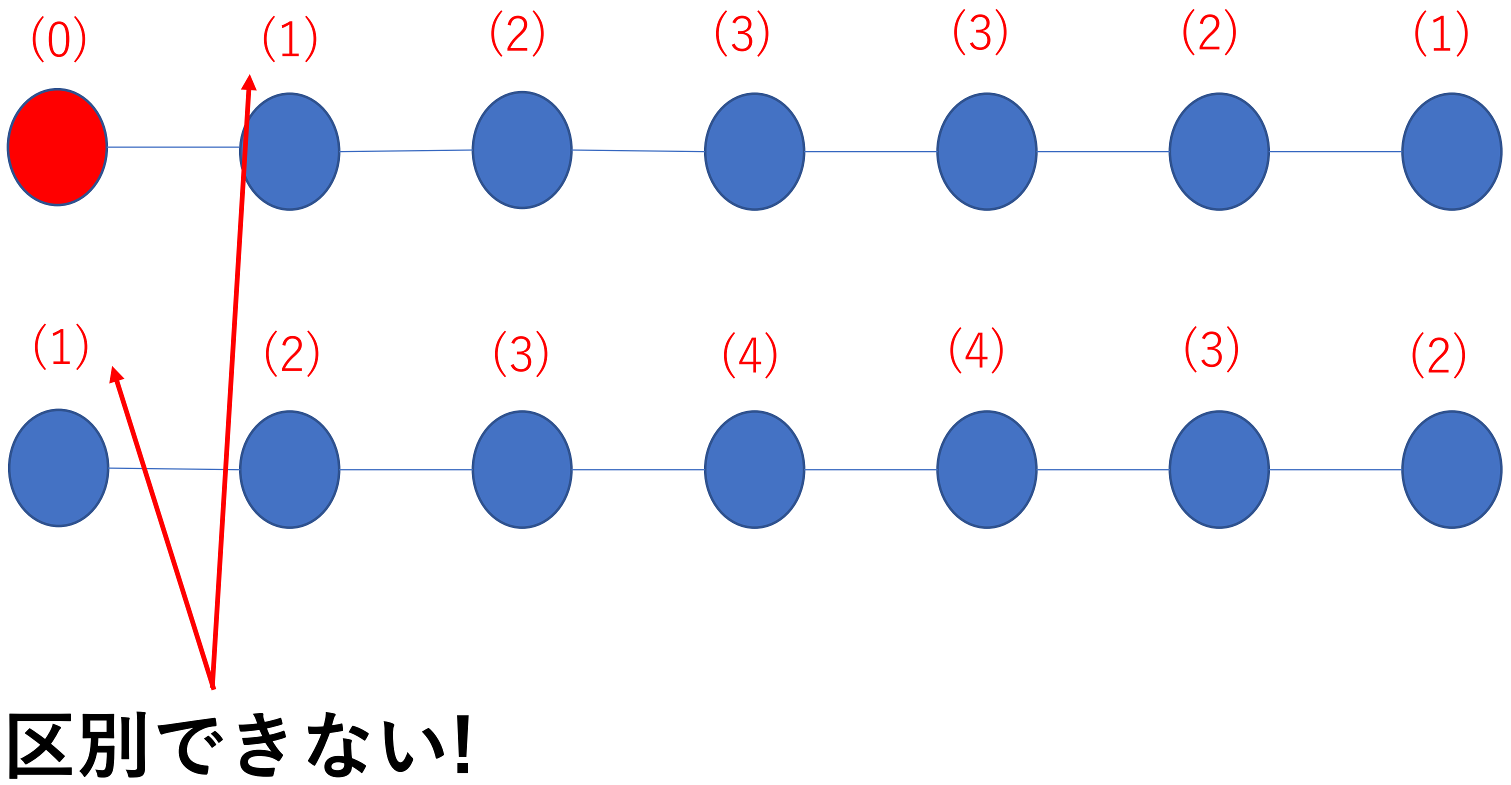
①$s = 2m+1-s'$　②$m-s = s'-m$

この2つの式を同時に満たすs,s'は存在しない

矛盾

センサー1つでは区別できない

1つ目のセンサーはどこに置いてもそこを座標(0,0)とすることができる。



奇数ラダー結果まとめ

定理

奇数ラダーのmetric dimension = 2

結果２

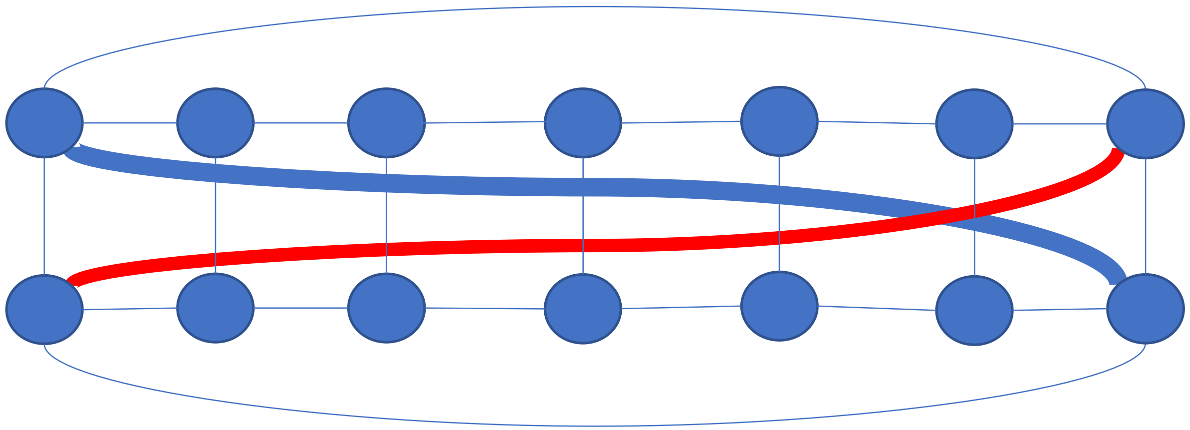
定理

　偶数ラダーのmetric dimension ＝ 3

(0,0),(0,1),(m,0)にセンサーを置く

メビウスラダー

メビウスラダー



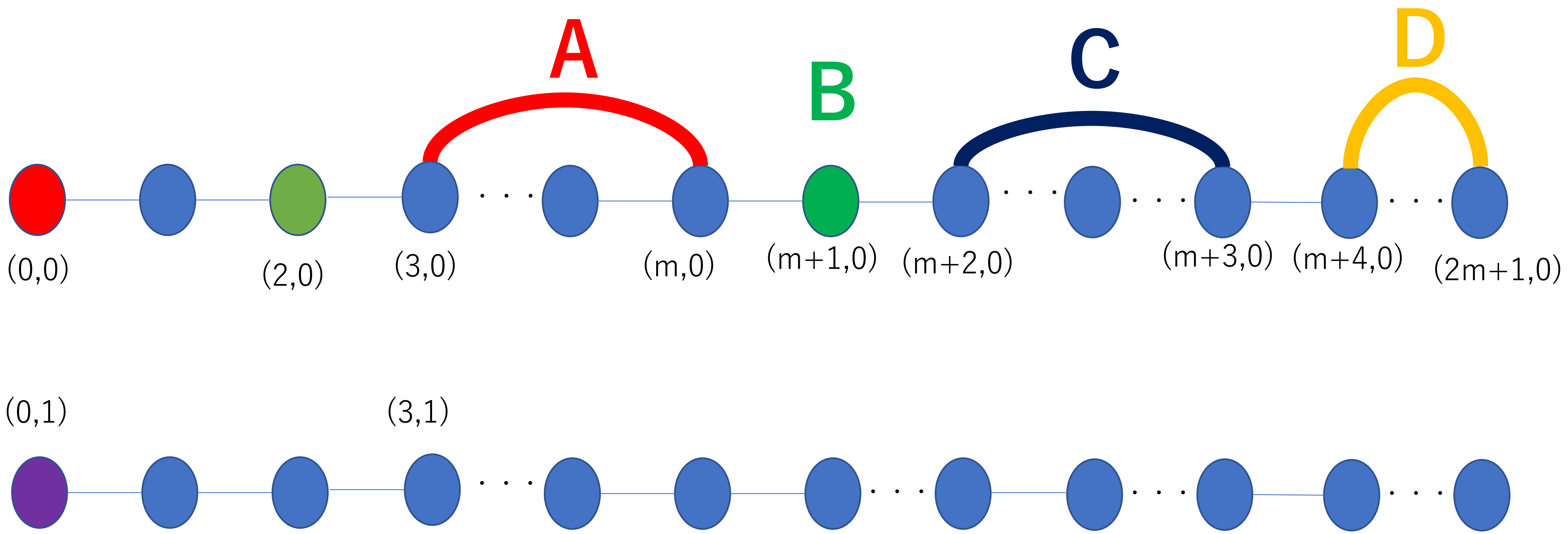
結果3

定理

　偶数メビウスラダーのmetric dimension = 3

(0,0),(2,0),(0,1)にセンサーに置けば区別できる
2個のセンサーでは区別できない

証明　3個のセンサーで区別できる

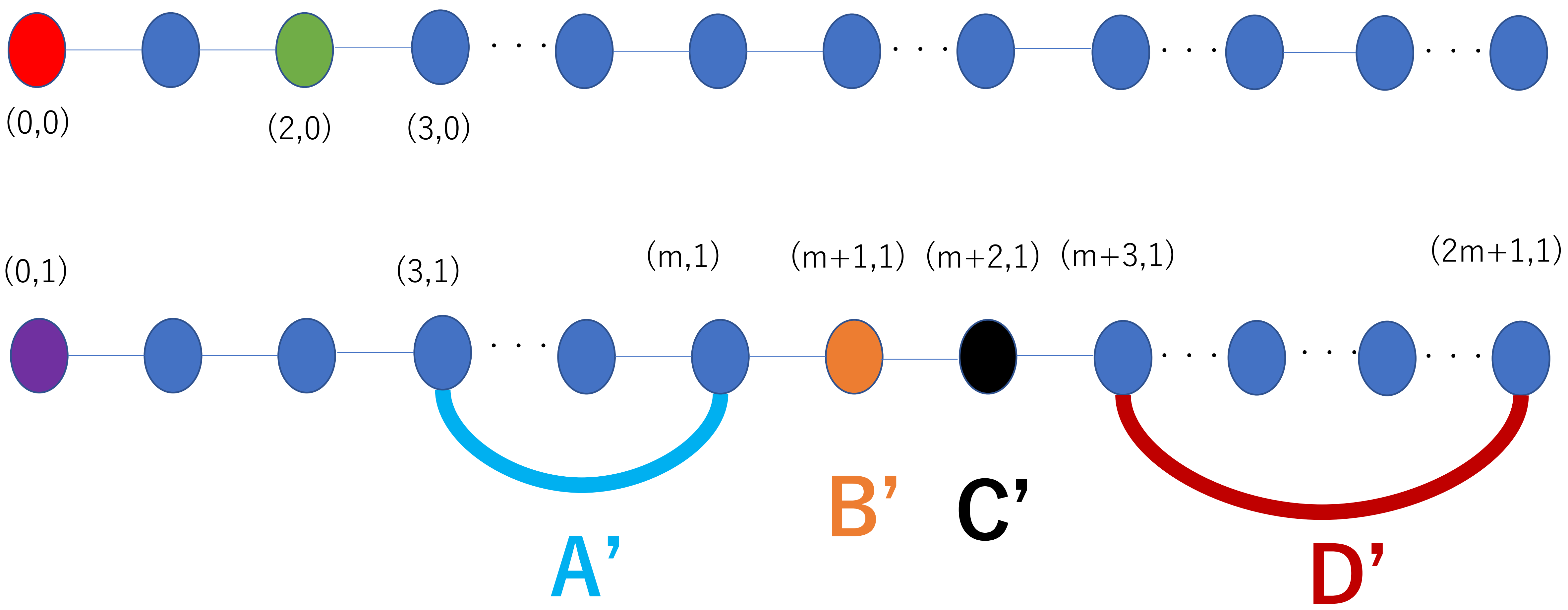


証明　3個のセンサーで区別できる

(s,t)の距離ベクトル

(s,t)の位置	距離ベクトル
A	(s,s-2,s+1)
B	(m+1,m-1,m+1)
C	(2m+3-s,s-2,2m+2-s)
D	(2m+3-s,2m+5-s,2m+2-s)

証明　3個のセンサーで区別できる



証明　3個のセンサーで区別できる

(s,t)の距離ベクトル

(s,t)の位置	距離ベクトル
A’	(s+1,s-1,s)
B’	(m+1,m,m+1)
C’	(m,m+1,m+1)
D’	(2m+2-s,2m+4-s,2m+3-s)

証明　3個のセンサーで区別できる

例えばAとCに同じベクトルがあるとすると、

$$(s,s-2,s+1) = (2m+3-s',s'-2,2m+2-s')$$

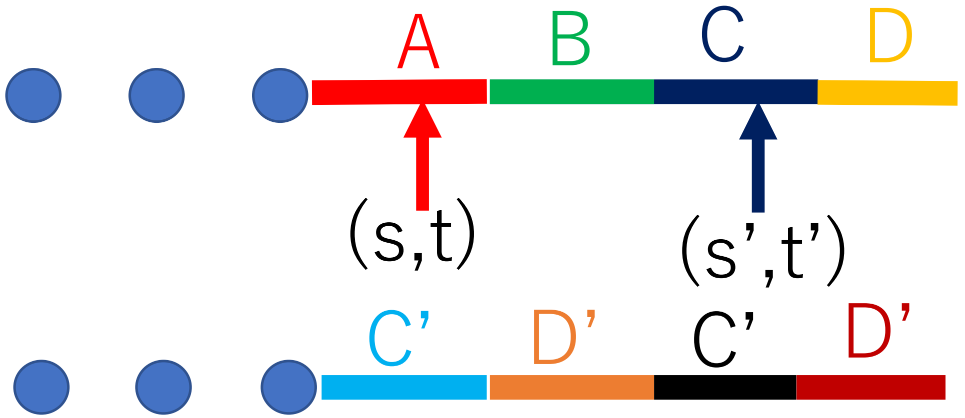
⬇

①$s = 2m+3-s'$　②$s-2 = s'-2$　③$s+1 = 2m+2-s'$

⬇

この3つの式を同時に満たすs,s'は存在しない

矛盾



証明　3個のセンサーで区別できる

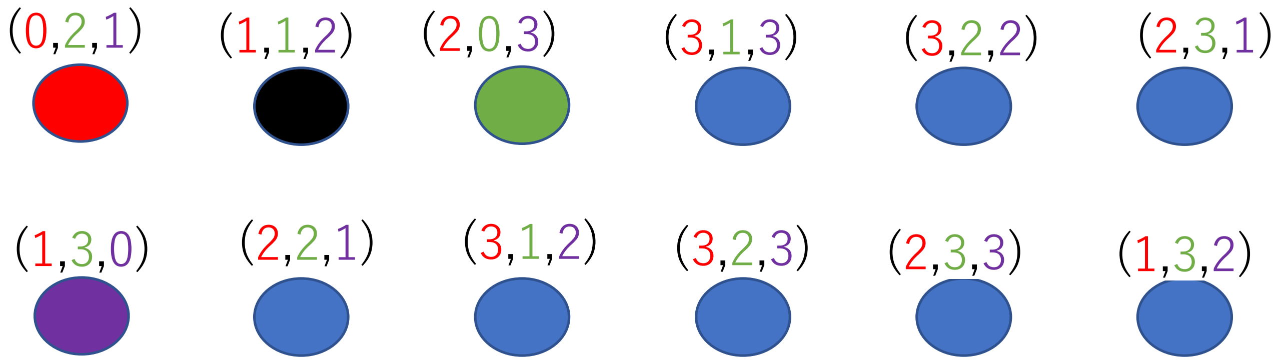
例えばAと(1,0)に同じベクトルがあるとすると、

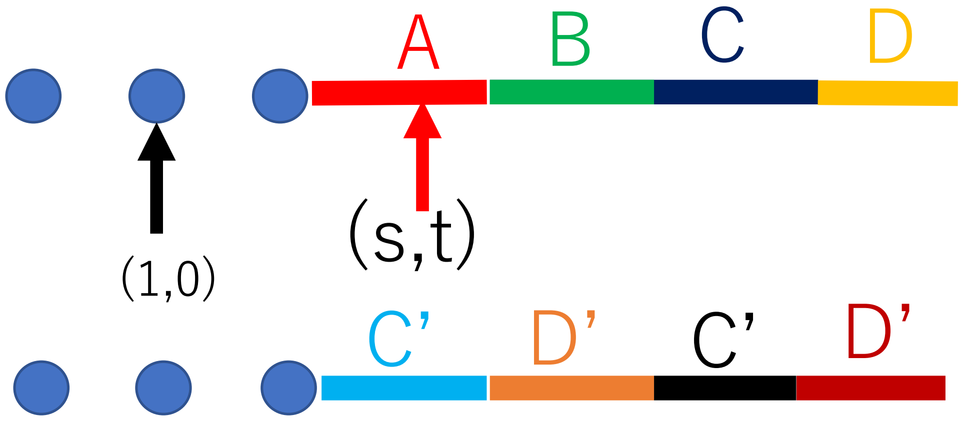
$$(s,s-2,s+1) = (1,1,2)$$

①$s = 1$　②$s-2 = 1$　③$s+1 = 2$

この3つの式を同時に満たすsは存在しない

矛盾



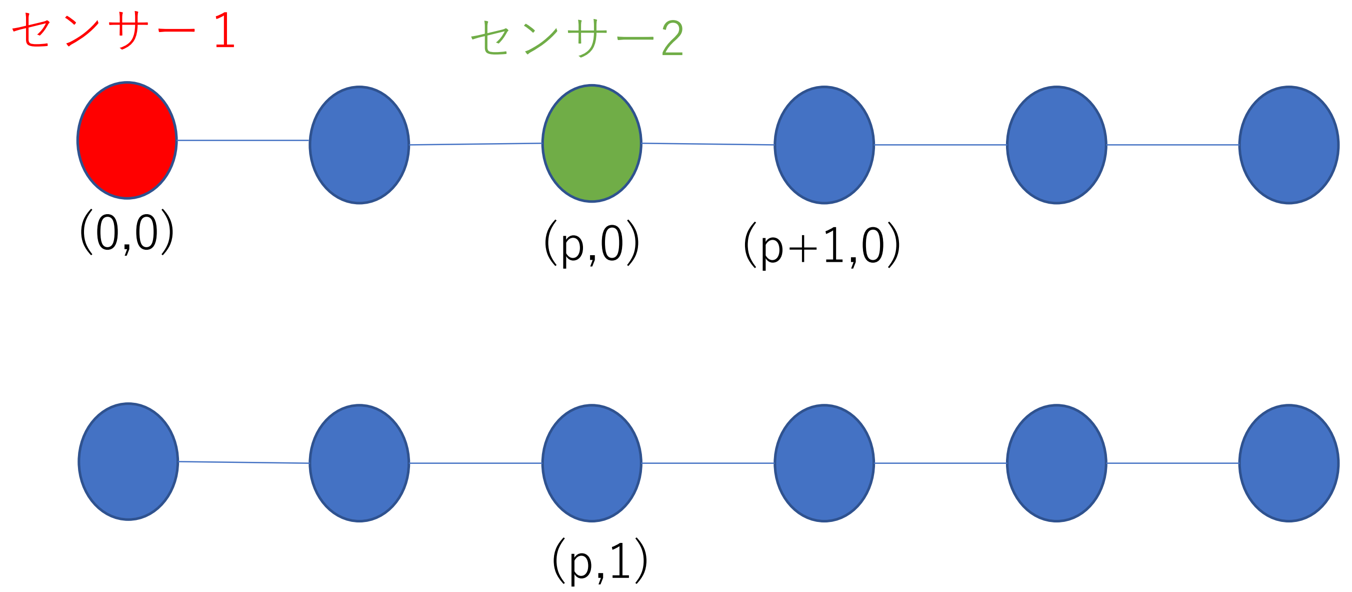


2個のセンサーでは区別できない

2個のセンサーで区別できたとして矛盾を示す

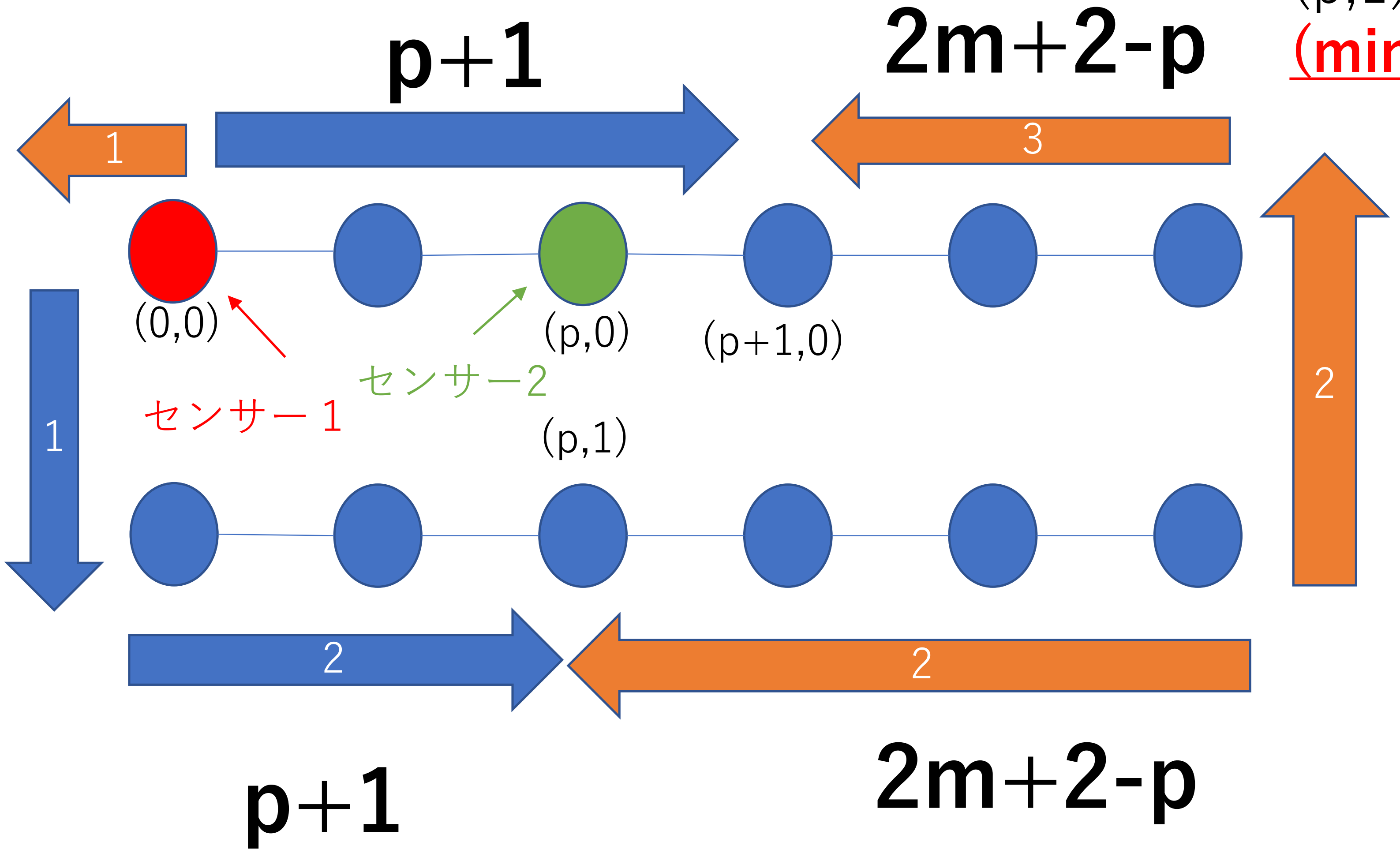
1つ目のセンサーはどこに置いてもそこを座標(0,0)とすることができる。

センサー2が上の行にあると



センサー2つでは区別できない

センサー2が上の行にあると



(p+1,0)の距離ベクトル

(min{p+1,2m+2-p},1)

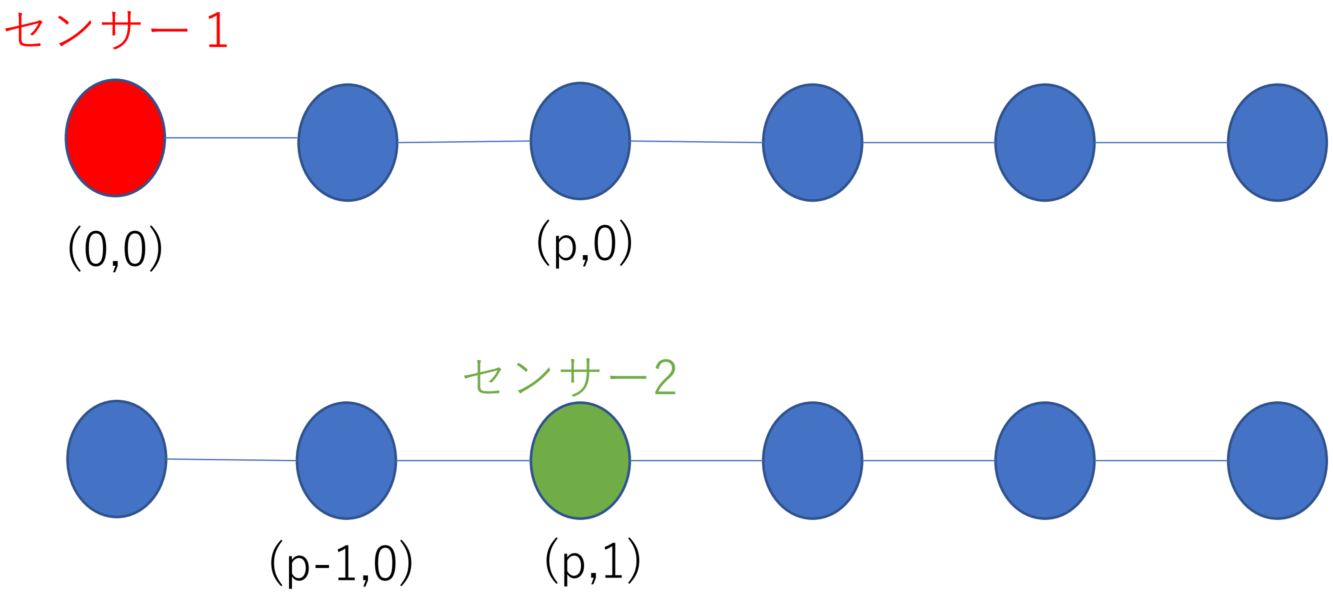
(p,1)の距離ベクトル

(min{p+1,2m+2-p},1)

区別できない

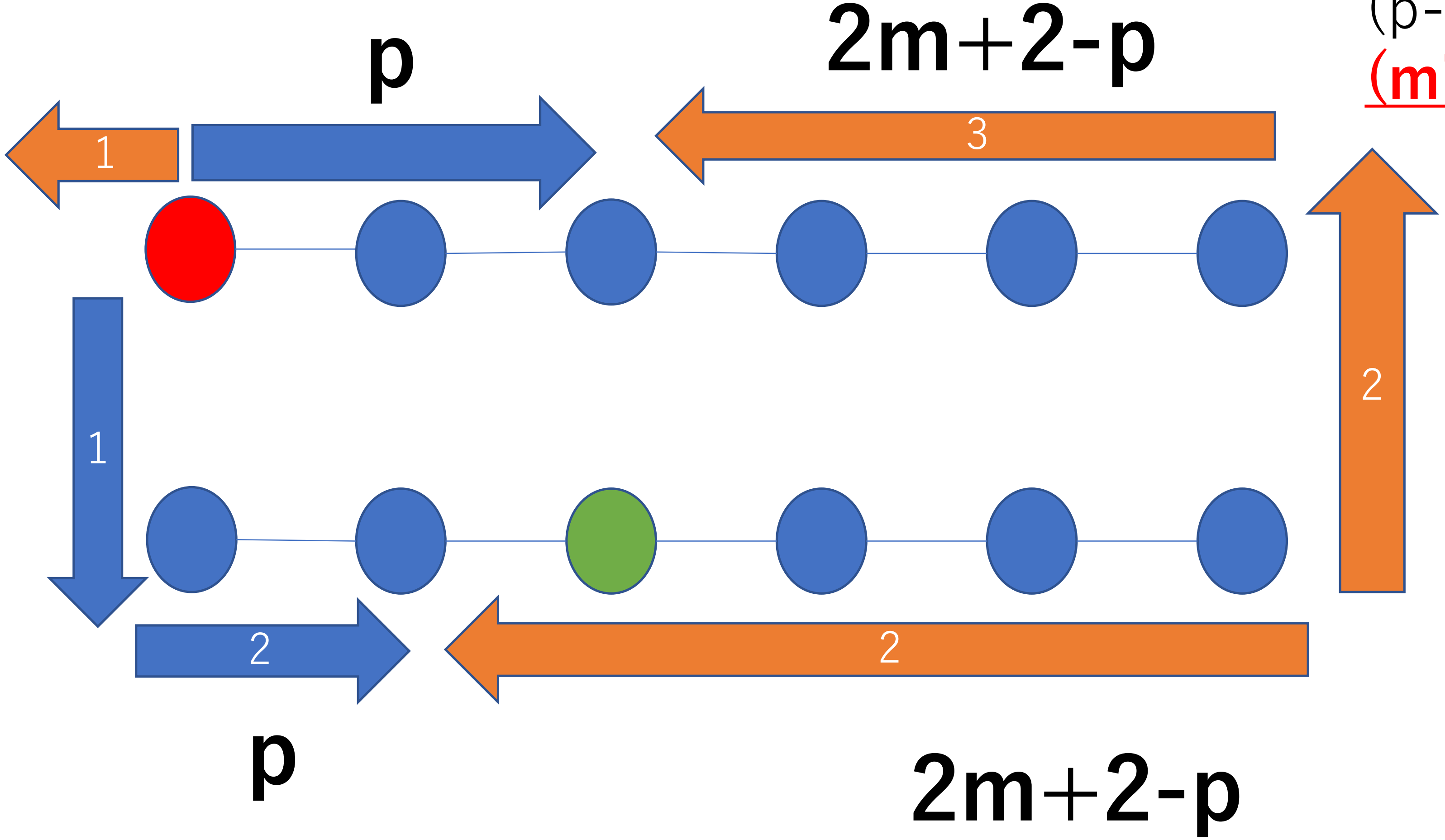
センサー2つでは区別できない

センサー2が下の行にあると



センサー2つでは区別できない

センサー2が下の行にあると



(p,0)の距離ベクトル
(min{p,2m+2-p},1)
(p-1,1)の距離ベクトル
(min{p,2m+2-p},1)

区別できない

偶数メビウスラダー結果まとめ

定理

偶数メビウスラダーの

metric dimension ＝ 3

結果4

定理

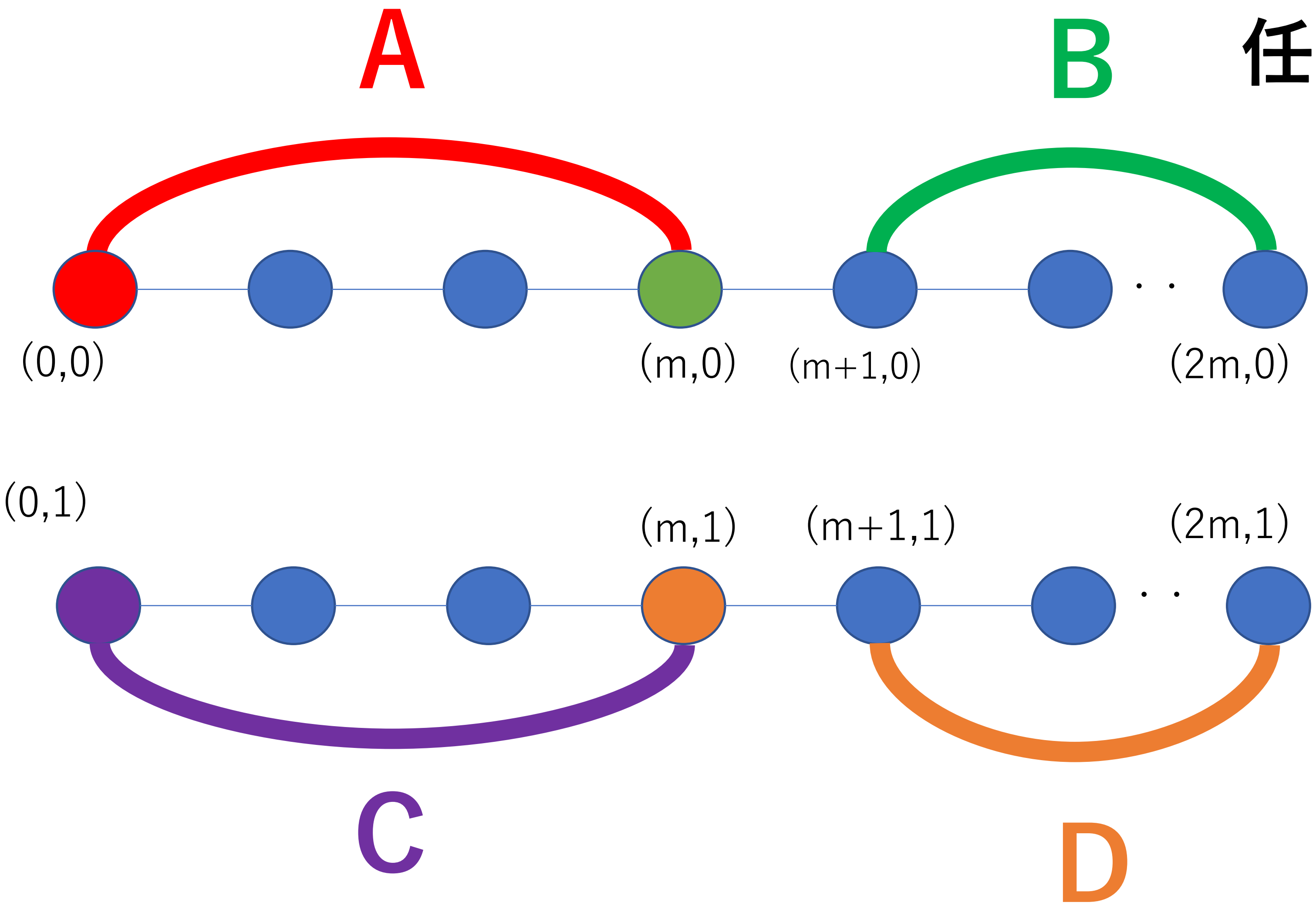
　奇数メビウスラダーのmetric dimension ≤ 4

=4であることは証明できていない

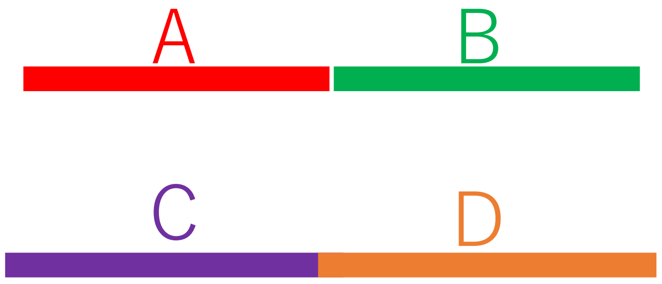
(0,0),(m,0),(0,1),(m,1)にセンサーを置く

4個のセンサーで区別できる

任意の頂点を(s,t)とする。



4個のセンサーで区別できる



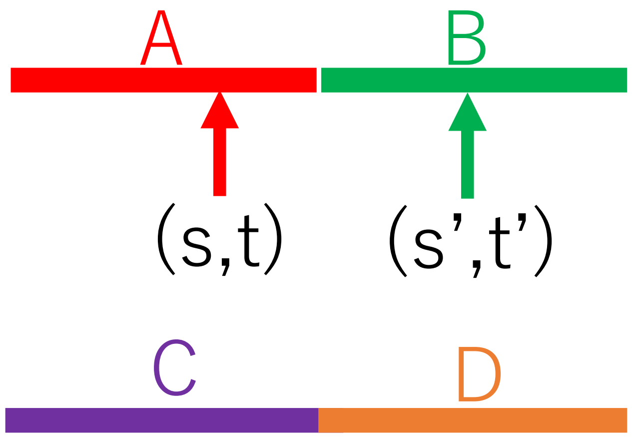
(s,t)の距離ベクトル

(s,t)の位置	距離ベクトル
A	(s,m-s,s+1,m-s+1)
B	(2m+2-s,s-m,2m+1-s,s-m+1)
C	(s+1,m-s+1,s,m-s)
D	(2m+1-s,s-m+1,2m+2-s,s-m)

4個のセンサーで区別できる

例えばAとBに同じベクトルがあるとすると、

$$(s,m-s,s+1,m-s+1) = (2m+2-s',s'-m,2m+1-s',s'-m+1)$$



①$s = 2m+2-s'$　②$m-s = s'-m$
③$s+1 = 2m+1-s'$　④$m-s+1 = s'-m+1$

この4つの式を同時に満たすs,s'は存在しない

矛盾

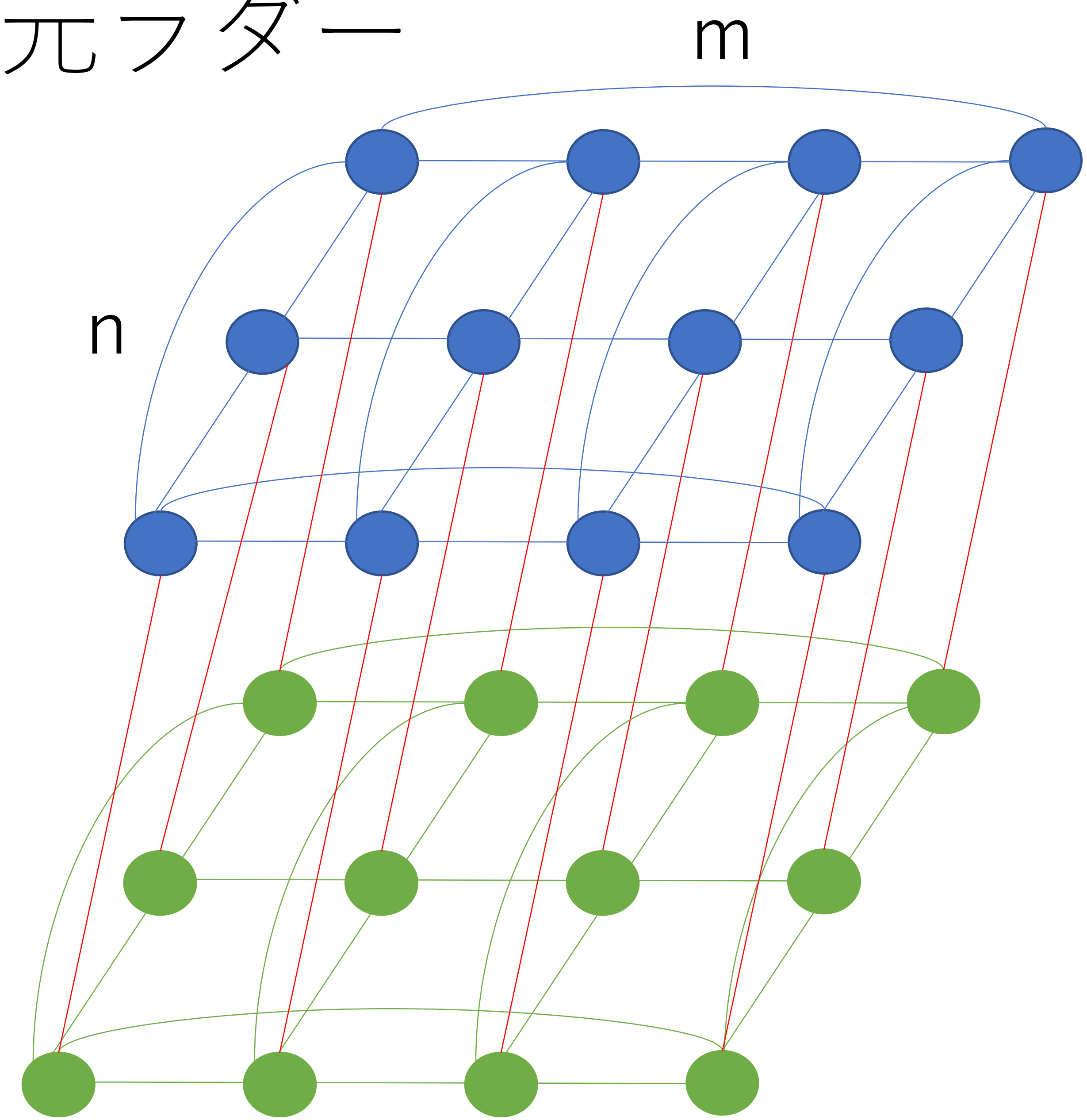
奇数メビウスラダー結果まとめ

定理

奇数メビウスラダーの

metric dimension ≤ 4

3次元ラダー



格子グラフと
そのコピーを作り、
対応する頂点を辺で結んで
できるグラフ

結果4

定理

奇数×奇数3次元ラダーのmetric dimension ＝ 3

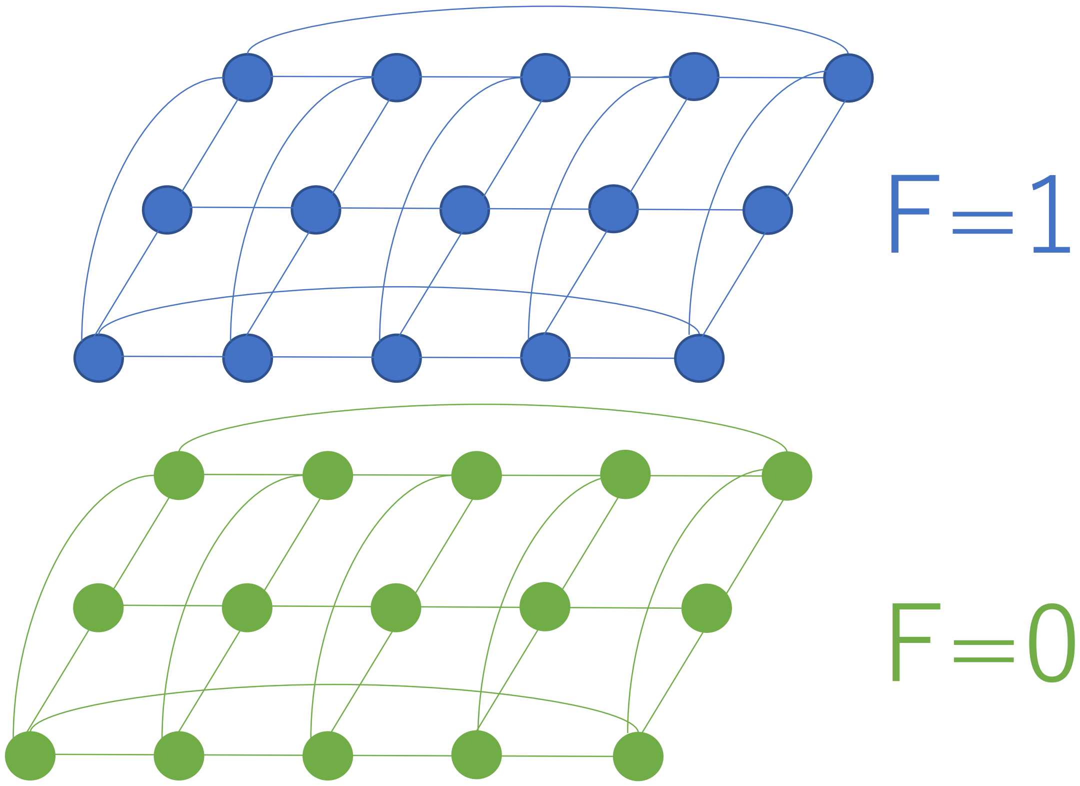
・3個のセンサーで区別できる

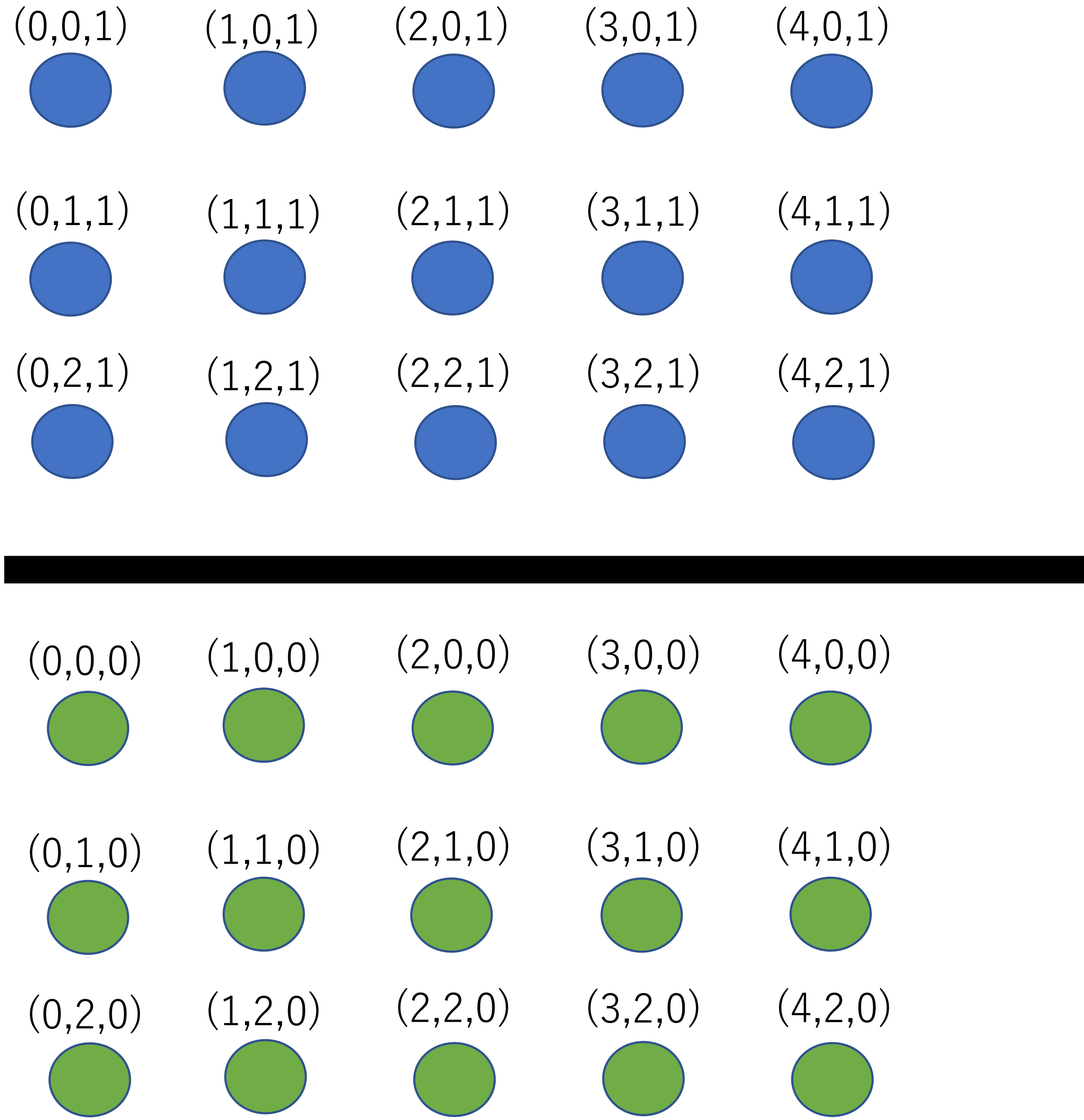
(0,0,0),(m,1,0),(0,n+1,0),にセンサーを置く

・2個のセンサーでは区別できない

3次元ラダー

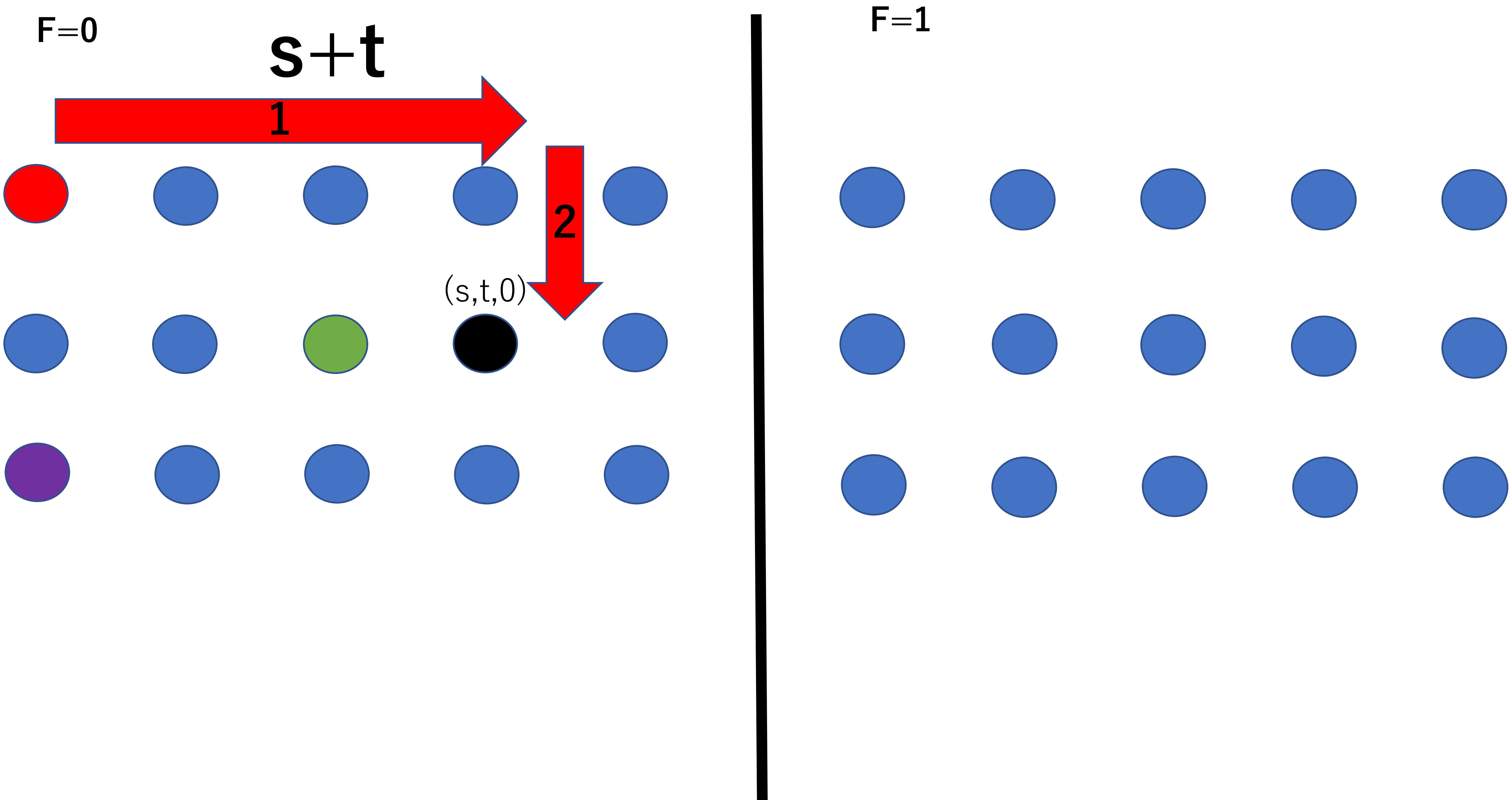
①各頂点に座標を付ける





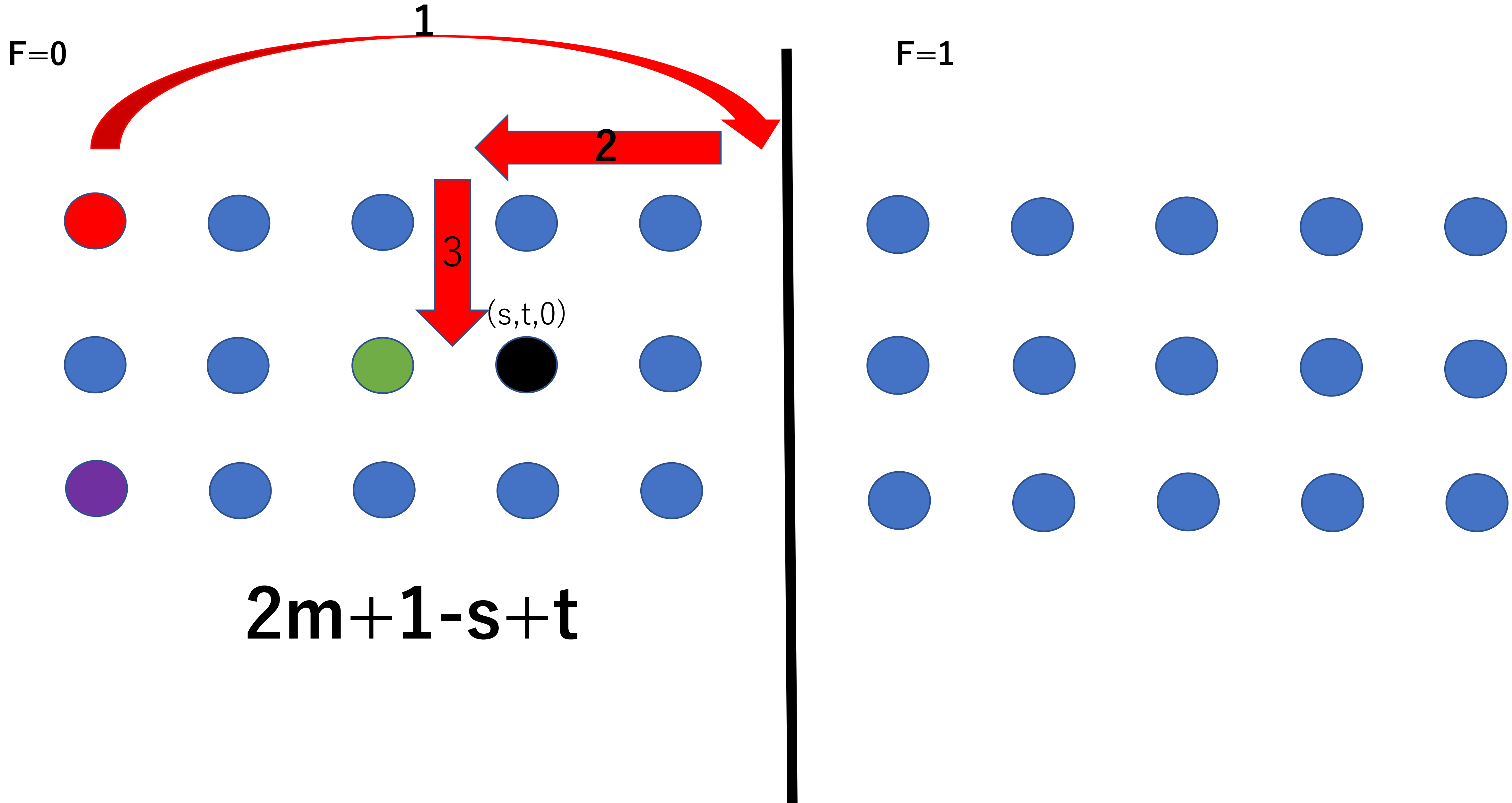
3個のセンサーで区別できる

任意の頂点(s,t,F)



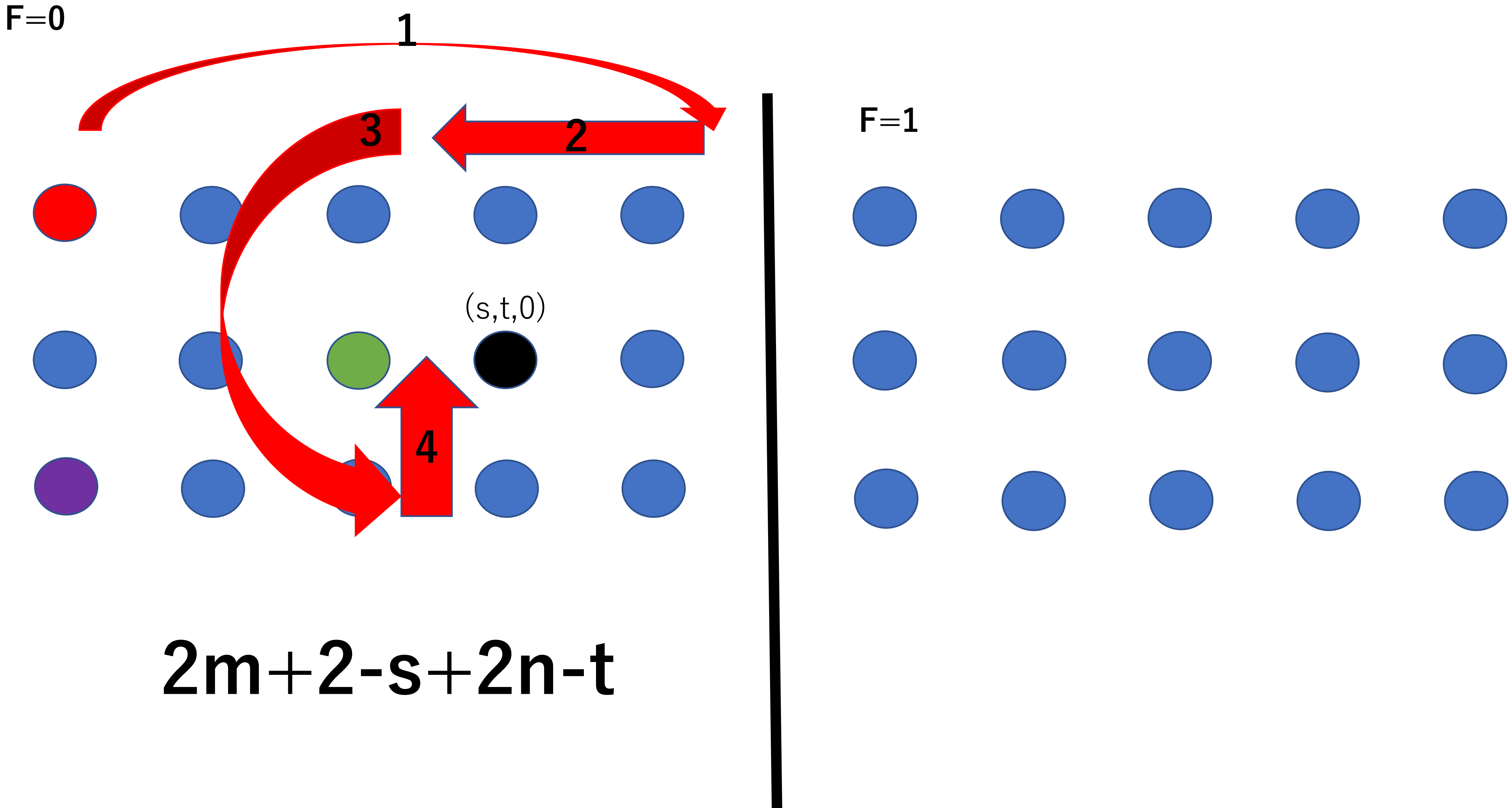
3個のセンサーで区別できる

任意の頂点(s,t,F)



3個のセンサーで区別できる

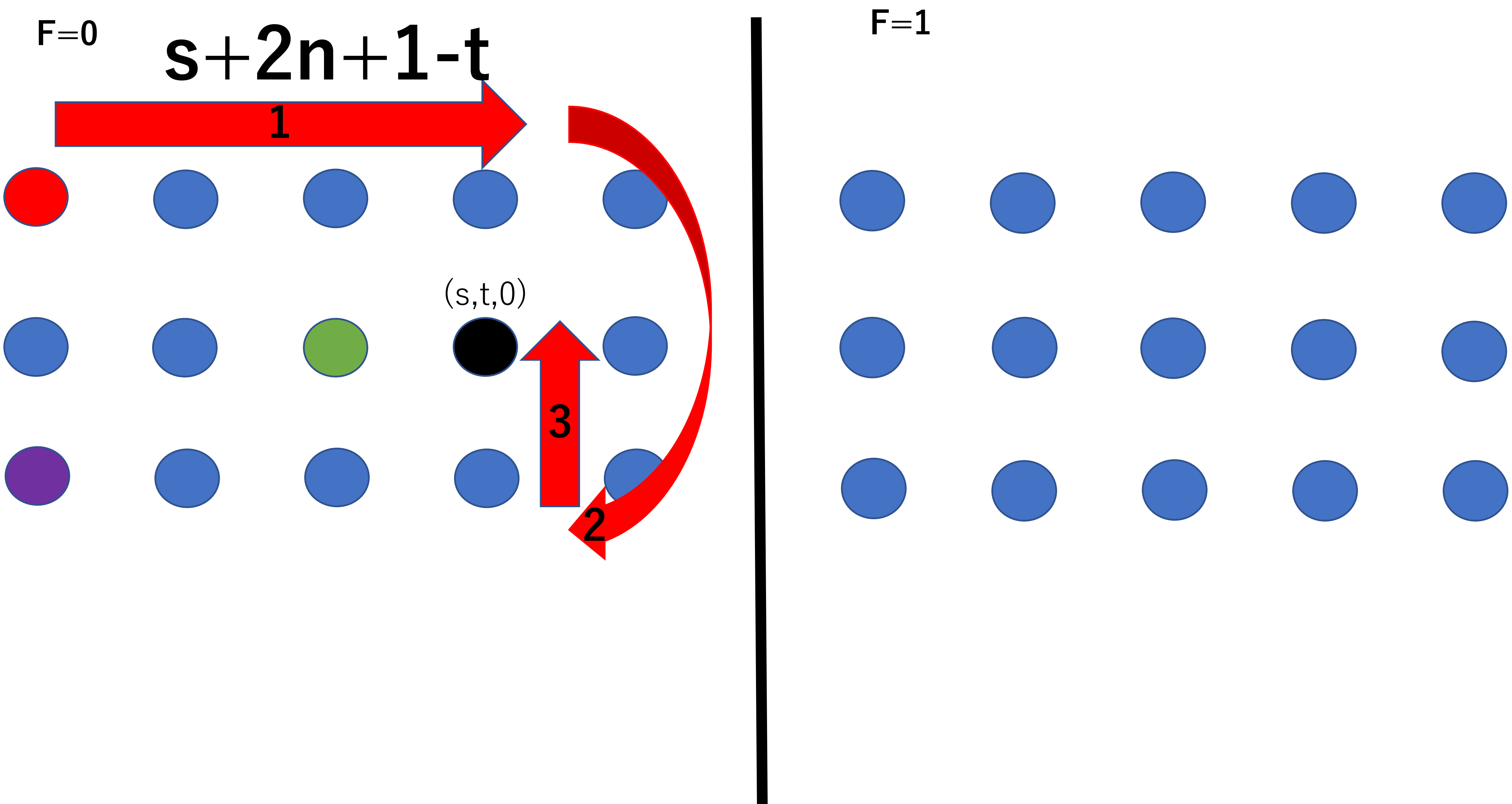
任意の頂点(s,t,F)



2m+2-s+2n-t

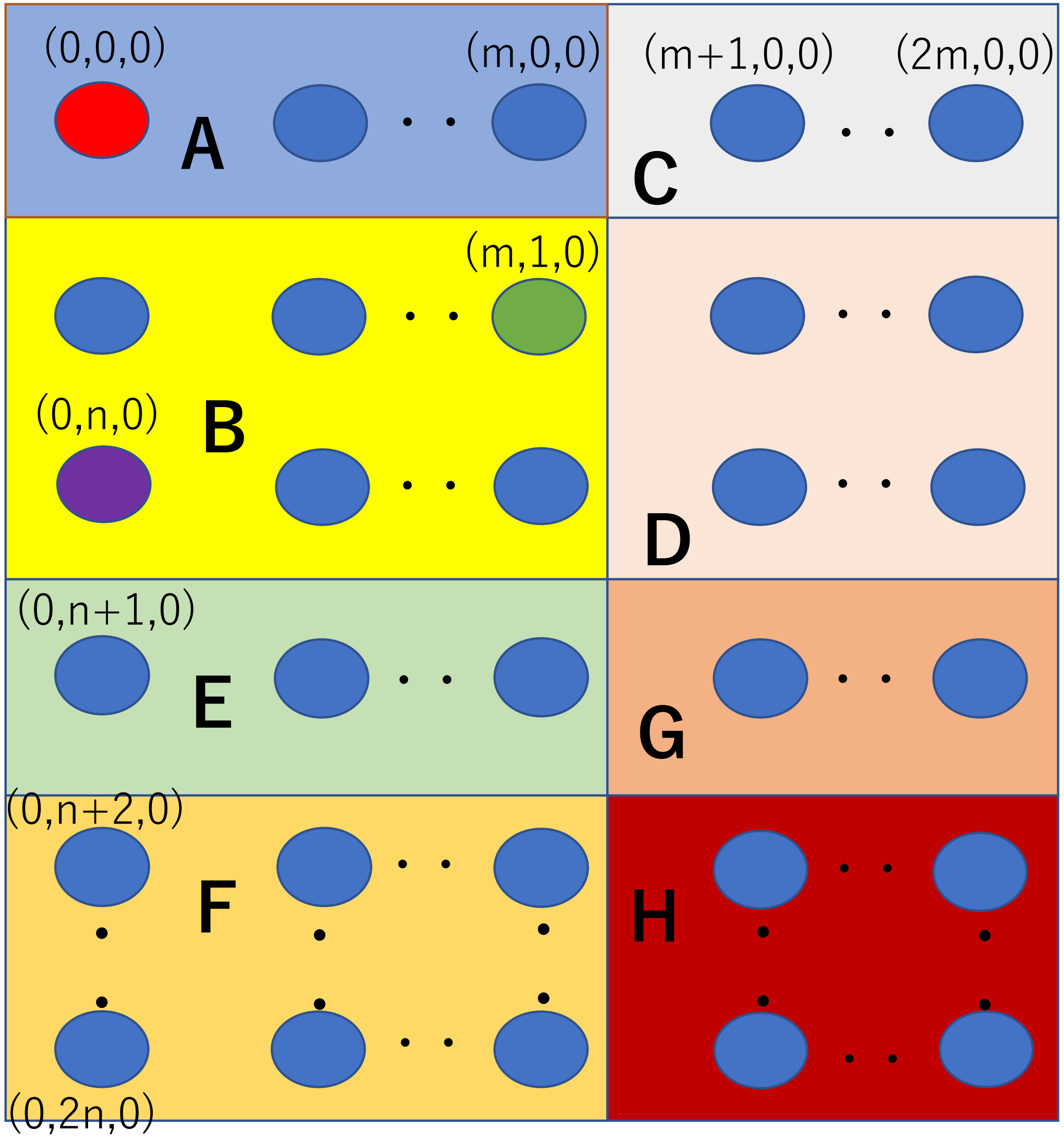
3個のセンサーで区別できる

任意の頂点(s,t,F)



3個のセンサーで区別できる

F=0



3個のセンサーで区別できる

A	C
B	D
E	G
F	H

A:$(s+t, m-s+t-1, s+n+t)$

B:$(s+t, m-s+t-1, s+n+1-t)$

C:$(2m-s+t+1, s-m+t-1, 2m-s+n+t+1)$

D:$(2m-s+t+1, s-m+t-1, 2m-s+n-t+2)$

E:$(s-t+2n+1, m-s+t-1, s+t-n-1)$

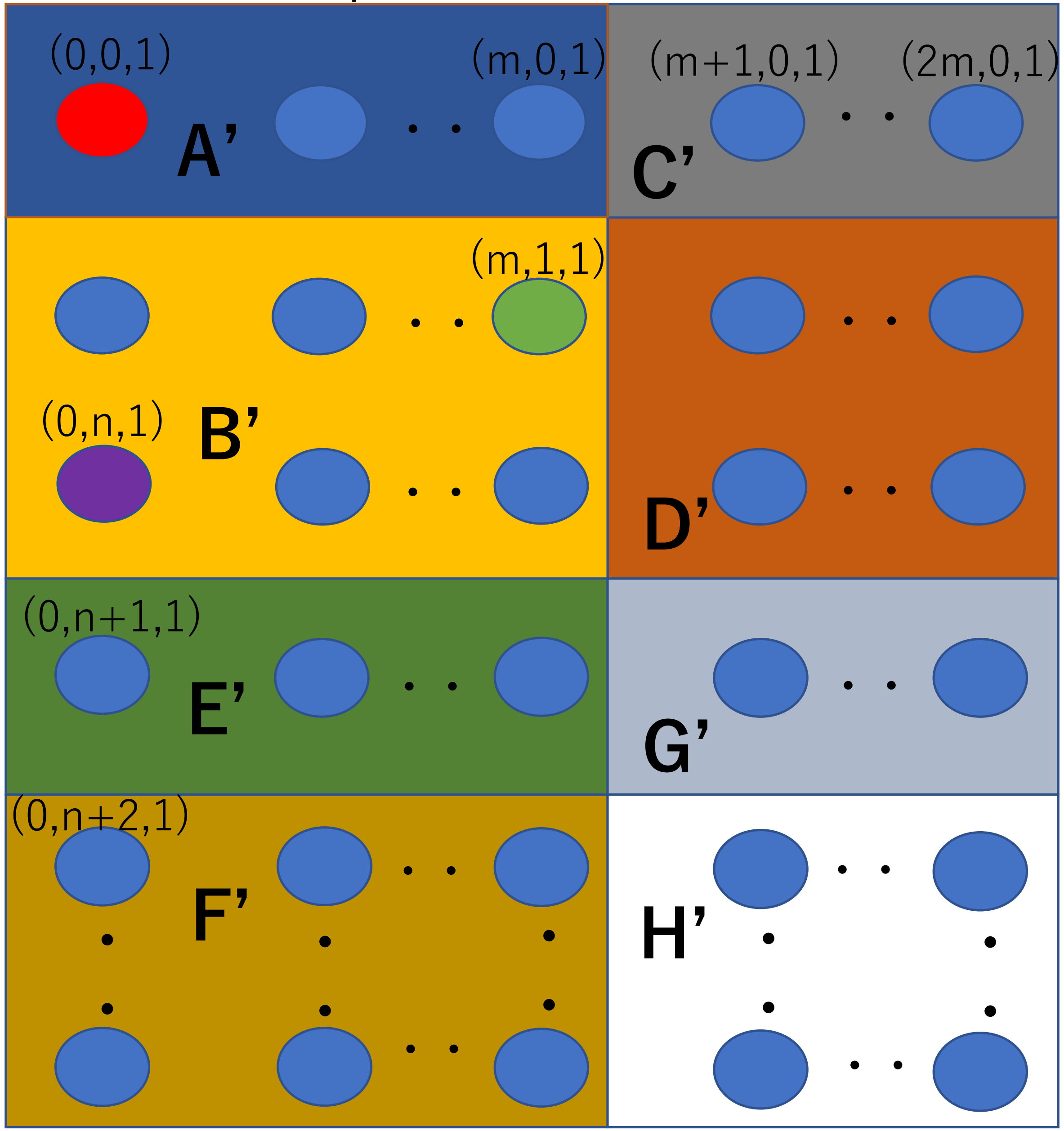
F:$(s-t+2n+1, m-s+2n+2-t, s+t-n-1)$

G:$(2m+2n-s-t+2, s-m+t-1, 2m-s+t-n)$

H:$(2m+2n-s-t+2, s-m+2n-t+2, 2m-s+t-n)$

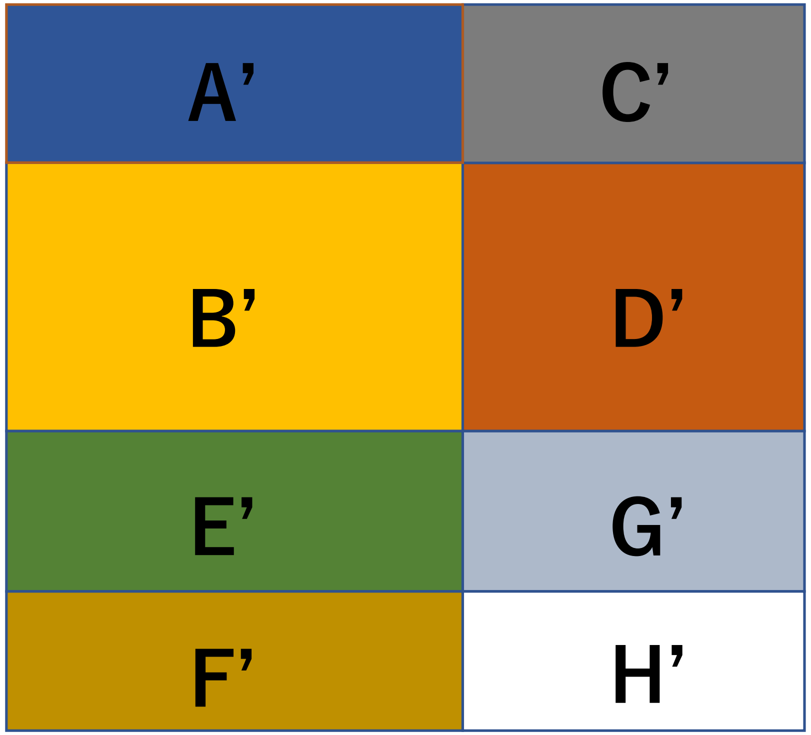
3個のセンサーで区別できる

F=1



3個のセンサーで区別できる

F=1



A':(s+t+1,m-s+t,s+n+t+1)

B':(s+t+1,m-s+t,s+n+2-t)

C':(2m-s+t+2,s-m+t,2m-s+n+t+2)

D':(2m-s+t+2,s-m+t,2m-s+n-t+3)

E':(s-t+2n+2,m-s+t,s+t-n)

F':(s-t+2n+2,m-s+2n+3-t,s+t-n)

G':(2m+2n-s-t+3,s-m+t,2m-s+t-n+1)

H':(2m+2n-s-t+3,s-m+2n-t+3,2m-s+t-n+1)

3個のセンサーで区別できる

例えばBとB'に同じベクトルがあるとすると、

$$(s+t, m-s+t-1, s+n+t) = (s'+t'+1, m-s'+t', s'+n+2-t')$$

A	C
B (s,t)	D
E	G
F	H

A'	C'
B' (s',t')	D'
E'	G'
F'	H'

①$s+t = s'+t'+1$　②$m-s+t-1 = m-s'+t'$

③$s+n+t = s'+n+2-t'$

この3つの式を同時に満たす(s,t),(s',t')は存在しない

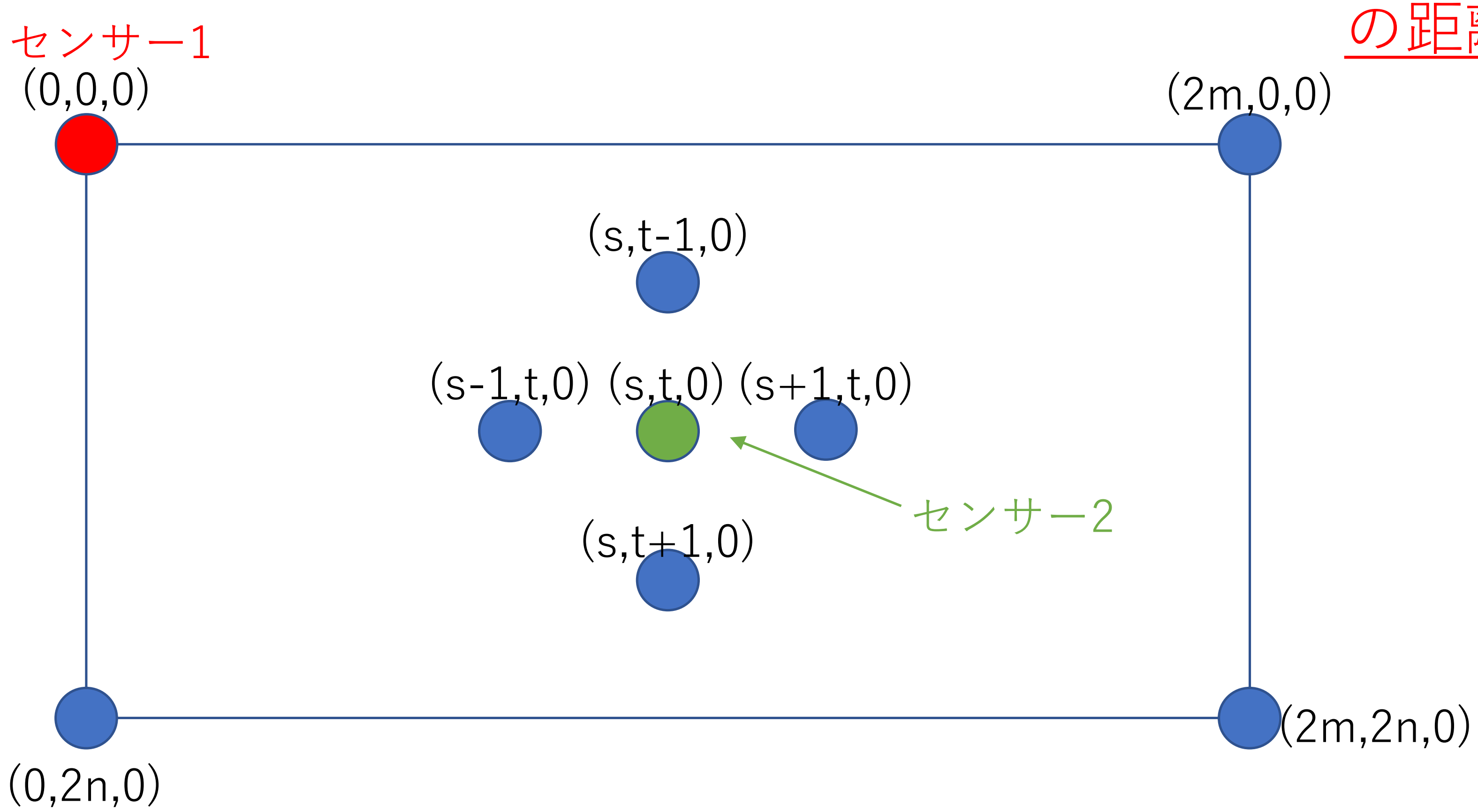
矛盾

2つのセンサーで区別できない

もし2つのセンサーで
区別できたとする
センサー1は(0,0,0)に置いてよい

2つ目のセンサーが
F=0にあるとすると

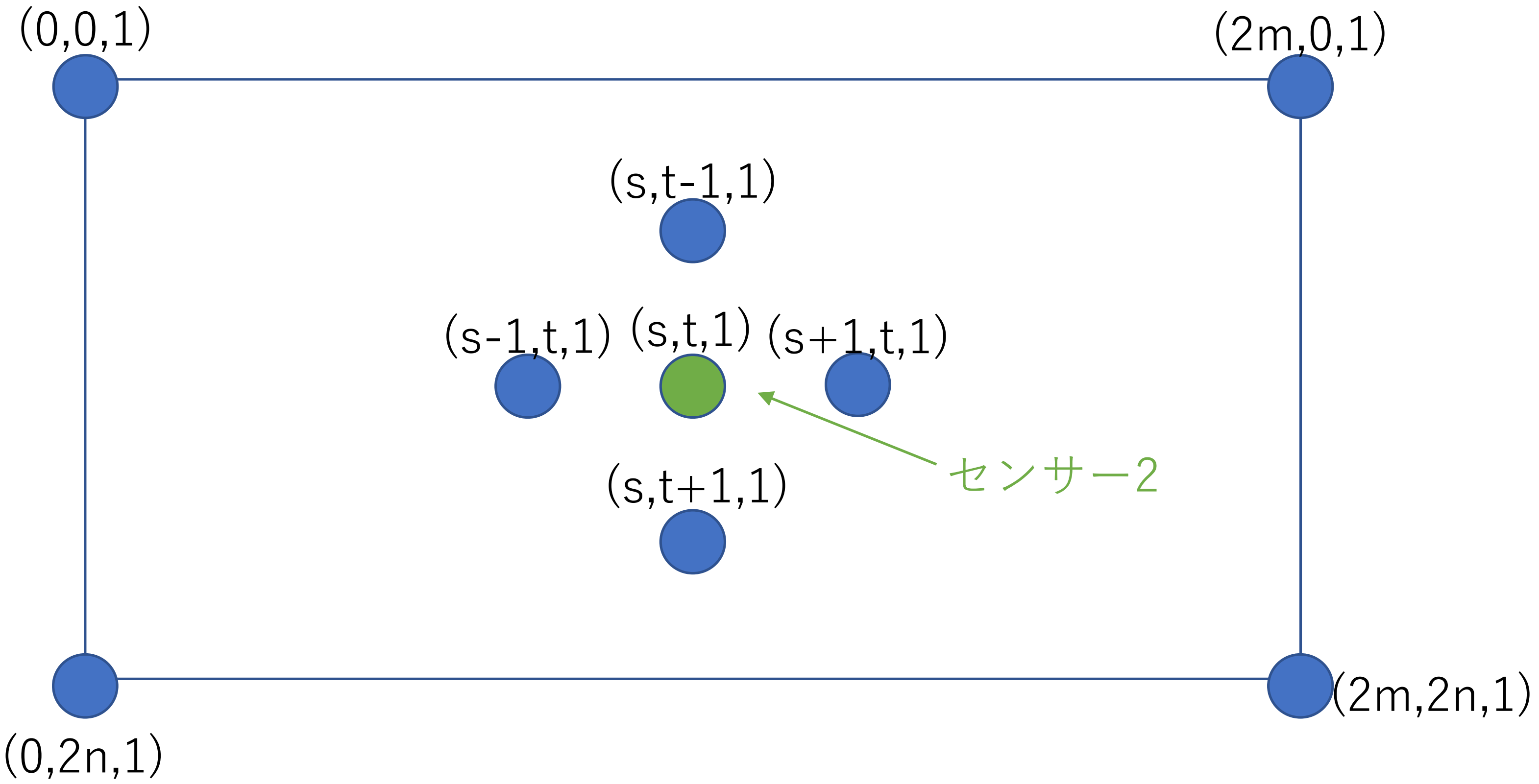
<u>(s,t)の位置に関わらず</u>
<u>(s-1,t,0),(s,t-1,0),(s+1,t,0),(s,t+1,0)</u>
<u>の距離ベクトルに同じ値が現れる</u>



2つのセンサーで区別できない証明

2つ目のセンサーが
F=1にあるとすると

(s,t)の位置に関わらず
(s-1,t,1),(s,t-1,1),(s+1,t,1),(s,t+1,1)
の距離ベクトルに同じ値が現れる



奇数×奇数3次元ラダーの結果まとめ

定理

　奇数×奇数3次元ラダーの

　　　　metric dimension ＝ 3

まとめ

- 奇数ラダーのmetric dimension $= 2$
- 偶数ラダーのmetric dimension $= 3$
- 偶数メビウスラダーのmetric dimension $= 3$
- 奇数メビウスラダーのmetric dimension ≤ 4
- 奇数×奇数3次元ラダーのmetric dimension $= 3$

今後の課題

- 奇数メビウスラダーのmetric dimensionが3でないことの証明
- 3次元ラダーのmetric dimensionは今回奇数×奇数のグラフでしか調べられなかったため、偶数×奇数や偶数×偶数などのmetric dimensionを調べたい

ご清聴ありがとうございました。